बीजगणिताचीं मूलतत्वें.

ह्या विषयाचा मूळ ग्रंथ इंग्रेजी भाषेंत हाडन् साहेबानें केला,

त्याचें हें मराठी भाषांतर

दाजी नीळकंठ नगरकर

ह्यांनीं करून दक्षिणाप्रैज कमेटीस नजर केलें,

तें

कृष्णशास्त्री गोडबोले

ह्यांनीं तपासून शुद्ध केलें, तें

मेहेरबान डैरेक्टर आफ पब्लिक इन्स्त्रक्शन ह्यांचे हुकुमावरून

पुणें पाठशाळेकडील छापखान्यांत छापिलें.

मुकाम पुणें.

छापणार नांगरामचंद्र ठकार क० छा०

सन १८५८



सूचना.

मूळपुस्तकांत कितीएक ठिकाणीं हस्तदोषांसारख्या कांहीं चुक्या होत्या त्या नीट केल्या; कितीएक ठिकाणीं कितीएक विषयांचीं कलमें फार संक्षेपानें लिहिल्यामुळें शिकणाऱ्यांस समजण्यास कठीण झालीं होतीं तीं इतरपुस्तकांच्या साह्यानें वाढवून समजण्या जोगीं केलीं; कितीएक प्रश्नांचीं उत्तरें असंभविक दिसतात तीं खरीं आहेत असें समजण्याकरितां कितीएकजागीं टिपा लिहिल्या; अशारीतीनें विद्यार्थ्यांस चांगलें सुलभ वाटाया जोगें जितकें करवलें तितकें केलें आहे.

मुकाम पुणें }
माहे फब्रुआरी सन १८५८ }

प्रस्तावना.



ज्यास बीजगणिताचें बरेंच ज्ञान झालें आहे, त्याच्या अनुभवासही गोष्ट आली असेल, कीं जोंपर्यंत त्यास समीकरणाच्या स्वरूपाचें ज्ञान झालें नव्हतें, तोंपर्यंत त्यास बीजगणिताचा अभ्यास करण्यांत कांहीं गोडी लागत नव्हती, आणि म्हणूनच बीजगणिताचे अभ्यासापासून त्याचे चित्तास समाधान वाटत नव्हतें; कांकीं तो शिकत असतां त्यास असे कितीएक विषय आले, कीं जे सहज समजण्याजोगे नव्हते, आणि त्यानें श्रम करून कांहीं नियम समजून घेतले असतां ही त्यांचा उपयोग त्यास त्यावेळीं समजत नव्हता अशा स्थितींत, ही विद्याच निरुपयोगी आहे, असें ही केव्हां केव्हां त्याचे मनांत आल्यावांचून राहिलें नाहीं

ह्या पुस्तकांत विषयांची रचना अशी केली आहे, कीं विद्यार्थ्यास बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार करतां येण्यापुरते मूळभूत नियम माहीत झाले न झाले तोंच त्यानें समीकरणाचे स्वरूपाचा विचार करूं-

प्रस्तावना.

लागावा. आणि त्यास जें काय थोडकेंसें ज्ञान प्राप्त झालें असेल त्याचे योगानें त्यानें कांहीं प्रश्न सोडवावे. असेंच, त्यास बीजांतील अपूर्णपद नियमांची माहिती झाली म्हणजे त्याच्या वाढलेल्या ज्ञानाचे योगानें त्यास सोडवतां येतील, अशीं कांहीं समीकरणें आणि प्रश्न अपूर्णबीजपद ह्या विषयांपुढें दिले आहेत.

अलीकडे जे मोठमोठे गणिती झाले त्यांपैकीं एकानें असें लिहिलें आहे, कीं गणित वगैरे विद्या शिकवितेवेळेस उदाहरणांच्या योगानें विद्यार्थ्यांचे मनांत त्या विद्यांचीं मूलतत्वें आणून देण्याची रीति नुसते नियम सांगण्याच्या रीतीपेक्षां चांगली आहे; आणि जो शिकविण्याचे कामांत वहिवाटलेला आहे तो ह्या मतास अनुसरेल. अभ्यास करते वेळेस विद्यार्थ्यास कांहीं साहाय्य मिळावें, ह्या हेतूनें ह्या पुस्तकांतील बहुतएक विषयांत कांहीं उदाहरणें व प्रश्न सोडवून त्यांत नियमांचें बरेंच स्पष्टीकरण केलें आहे.

अनुक्रमणिका.

अनुक्रमणिका.

प्रकरण ८

प्रकरण ९.

प्रकरण १०.

प्रकरण ११.

प्रकरण १२.

प्रकरण १३.

प्रकरण १४.



बीजगणित.

प्रकरण १

(१) ज्यां विद्येंत विवक्षित संख्येचें किंवा संख्यांचें सामान्यतः अक्षरांनीं व कार्यप्रकाशकचिन्हांनीं प्रदर्शन केलें असतें, त्या विद्येस **बीजगणित** असें म्हणतात. त्यांत जीं अक्षरें येतात तीं दोन जातींचीं पदें दाखवितात. **अ**, **ब**, **क**, इत्यादि अक्षरें व्यक्तपदें दाखवितात, आणि **क्ष**, **य**, **ज्ञ**, इत्यादि अक्षरें अव्यक्त पदें दाखवितात.

ह्या गणितांत ज्या कार्यप्रकाशकचिन्हांची योजना करितात तीं चिन्हें लिहितों.

= ह्या चिन्हास **बरोबरीचें** चिन्ह असें म्हणतात.

+ ह्यास **धन** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **बेरीज** दाखवितें. उदाहरण, जसें ३ + ५ = ३ आणि ५ ह्यांची बेरीज = ८; तसें, **अ**+**ब**=**अ** आणि **ब** ह्यांची बेरीज.

— ह्यास **ऋण** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **वजाबा**-

की दाखविते. उदाहरण, जसें ५-२= पांच आणि दोन ह्यांची वजाबाकी=३; तसें, **ब-क** = **ब** आणि **क** ह्यांची वजाबाकी.

जेव्हां **क्ष** आणि **य** ह्या दोन पदांतून मोठें कोणतें व लहान कोणतें हें कळत नाहीं, तेव्हां ह्यांचें अंतर ~ ह्या चिन्हानें दाखवितात. म्हणजे **क्ष~य**.

किंवा · ह्यास **गुणन** चिन्ह म्हणतात. हें **गुणाकार** दाखवितें. उदाहरण, २**क**×३**ड**= दुप्पट **क** आणि तिप्पट **ड** ह्यांचा गुणाकार. येथें दोहोंस **क**चा **वेळाप्रकाशक** किंवा **गुणक** म्हणतात, आणि तिहींस **ड**चा **वेळाप्रकाशक** किंवा **गुणक** म्हणतात. **अक्ष** आणि **बक्ष** ह्यांचा अर्थ **अ**×**क्ष** आणि **ब**×**क्ष** असा आहे. येथें **अ** आणि **ब** ह्यास **क्ष**चें **अक्षर** वेळाप्रकाशक म्हणतात. कधीं कधीं गुणाकार पुढें सांगितल्या रीतीप्रमाणें लिहितात. (**अ**+**ब**)·(**क**−**ड**) किंवा (**अ**+**ब**)(**क**−**ड**) किंवा $\overline{अ+ब}\cdot\overline{क-ड}$ ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, **अ** आणि

ब ह्यांच्या बेरजेस क आणि ड ह्यांच्या वजा-
बाकीनें गुणावें. अब+क, ह्याचा अर्थ अ-
सा आहे कीं, अ आणि ब ह्यांचा गुणाकार
करून त्यांत क मिळवावा. जर अ=२,ब=३,
आणि क=१, अशा संख्या धरल्या तर अब+
क=२×३+१=७. अ(ब+क), ह्याचा
अर्थ असा आहे कीं, ब आणि क ह्यांचे बेर-
जेस अनें गुणावें; वरचे प्रमाणेंच जर अ=२,
ब=३, आणि, क=१, अशा संख्या धरिल्या तर,
अ(ब+क)=२(३+१)=२×४=८ होतात.

ह्या चिन्हास भाजनचिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह
भागाकार दाखवितें. उदाहरण, म÷न किंवा
प्रसिद्ध रीतीच्या अन्वयें $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ ह्याचा अर्थ ननें म-
ला भागावें असा आहे. जर म=६ आणि न=२
असें धरलें तर, $\frac{\text{म}}{\text{न}}=\frac{\text{६}}{\text{२}}=\text{३}$ होतात.

ह्या चिन्हास प्रमाणचिन्ह म्हणतात. उदाह-
रण, अ:ब::क:ड. ह्याचा अर्थ असा आ-
हे कीं, अ आणि ब ह्यांच्या मध्यें जें प्रमाण
आहे, तेंच प्रमाण क आणि ड ह्यांच्या मध्यें

आहे.

$\sqrt{}$ किंवा $\sqrt{\ }$ ह्यांस मूळचिन्हें म्हणतात. उदाहरण, $\sqrt{क्ष}$ म्हणजे क्षचें वर्गमूळ होय.

$\sqrt[3]{क्ष+य}$ म्हणजे क्ष आणि य ह्यांचे बेरजेचें घनमूळ होय.

२, ३, ४, इत्यादि चिन्हें पदांच्या डोक्यावर मांडलीं असतां तीं त्या पदांचे ते ते घात दाखवितात. उदाहरण, $क्ष^{२}$ म्हणजे क्षचा वर्ग (म्हणजे दुसरा घात) होय. $(क्ष+ज्ञ)^{४}$ किंवा, $\overline{क्ष+ज्ञ}^{४}$ म्हणजे क्ष आणि ज्ञ ह्यांचे बेरजेचा चतुर्घात. जर, क्ष=६ आणि ज्ञ=४ धरले, तर $(क्ष+ज्ञ)^{४}=(६+४)^{४}=(१०)^{४}=१००००$ होतील.

सांगितलेल्या चिन्हांखेरीज आणखी दुसरीं चिन्हें आहेत तीं नुसतींच लिहून दाखवितों. कारण, तीं विवरण केल्यावांचून समजण्याजोगीं आहेत.

ह्याचा अर्थ कारण कीं, $\therefore$ ह्याचा अर्थ म्हणून. $\propto$ ह्याचा अर्थ प्रमाणानें विकार पावणें. $>$ ह्याचा अर्थ पेक्षां मोठें. $<$ ह्याचा अर्थ पेक्षां लहान. ∞ ह्याचा अर्थ अनंतत्व. आणि $\pm$ ह्याचा

र्थ **अधिक** किंवा **उणें** .

उदाहरण १, $\text{अ}=३$, $\text{ब}=२$, आणि $\text{क}=४$, असें धरून पुढील पदांची संख्या काढ .

१, $\text{अ}+३\text{ब}+\text{क}$; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, १२

२, $४\text{अ}+२\text{ब}-\text{अक}$ ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ४

३, $\text{अ}^{२}+\text{ब}(\text{क}-\text{अ})$; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ११

४, $५(\text{अ}+\text{ब}^{३}-२\text{क})$; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, १५

उदाहरण २, जेव्हां $\text{क्ष}=४$, $\text{य}=३$, $\text{ज्ञ}=१$, आणि $\text{न}=२$, आहेत तेव्हां पुढील पदांची संख्या काढ .

१, $\text{न}(\text{क्ष}+\text{य}-\text{ज्ञ})$; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, १२

२, $\dfrac{\text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३}-९\text{ज्ञ}}{८\text{न}+१}$ ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, २

३, $\dfrac{\text{क्ष}^{३}}{८}-\dfrac{\text{य}^{२}}{३}+\text{न ज्ञ}$; ह्यांची संख्या काय होती ?

उत्तर, ७

४, (क्ष^2-य^2)-(क्ष-य)^2+न(क्ष-य-ज्ञ);

ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, ६

(२) ज्या पदांतलीं अक्षरें एकसारखींच असतात त्यांस **सरूपपदें** म्हणतात. जसें, २**अ**, ५**अ**; ७**क्ष^2**, ४**क्ष^2**, आणि **अक्षय**, २**अक्षय**, १०**अक्षय**; इत्यादि.

ज्या पदांचीं अक्षरें भिन्न भिन्न असतात, त्यांस **विरूपपदें** म्हणतात. जसें, २अ, २ब, ५अय;

ज्या पदांच्या पूर्वीं + हें चिन्ह असतें, किंवा कोणतेंही चिन्ह नसतें त्या पदांस **धनपदें** म्हणतात.

ज्या पदांच्या पूर्वीं – हें चिन्ह असतें, त्या पदांस **ऋणपदें** म्हणतात.

एका पुरुषाजवळ २रुपये आहेत असें मानलें तर, त्याजवळ वास्तविक २रुपये आहेत, म्हणून ते +२ रुपये आहेत, असें म्हणावें. आतां त्यांतील १रुपया त्यानें खर्चिल्यास त्याजवळ वास्तविक एक रुपया राहिला तो +१ रुपया असें म्हणावें. पुढें त्यानें तोही रुपया खर्चिल्यास त्याजवळ वास्तविक कांहीं राहिलें नाहीं;

म्हणून त्याजपाशीं ० आहे असें म्हणावें.

आतां आपण असें समजूं कीं, त्यानें एक रुपया कर्ज घेतला तर त्याला एक रुपया कर्ज झाला, म्हणून −१ रुपया आहे असें म्हणावें. पुढें त्यानें आणखी एक रुपया कर्ज घेतला अशी कल्पना केल्यास त्यास एकंदर दोन रुपये कर्ज झाले म्हणून त्याजवळ −२ रुपये आहेत असें म्हणावें

(३) बीजगणितांतील प्रत्येक पदास **अंकरूप** वेळाप्रकाशक असतो. तो कधीं कधीं लिहितात, व कधीं कधीं लिहीत नाहींत. जेथें वेळाप्रकाशक लिहिलेला नसतो तेथें १ हा वेळाप्रकाशक आहे असें समजावें. म्हणून, जसें; ३ घोडे, ५ घोडे, आणि १ घोडा मिळून ९ घोडे होतात; तसें, ३ अ, ५ अ, आणि अ, मिळून ३ अ + ५ अ + १ अ = ९ अ होतात. आणि जसें, धान्याच्या १० गोण्या आहेत त्यांतून एक गोणी काढिली म्हणजे ९ गोण्या राहतात, तसें १० क्ष − क्ष = १० क्ष − १ क्ष = ९ क्ष होतात.

बेरीज.

उदाहरणें.

पहिलें, २अ+ब, ३अ+२ब, अ+५ब, आणि ३ब+४अ; ह्यांची बेरीज कर.

२अ+ब.	
३अ+२ब.	येथें २अ+३अ+१अ+४अ=१०अ
अ+५ब.	आणि १ब+२ब+५ब+३ब=११ब
४अ+३ब.	∴ एकंदर बेरीज १०अ+११ब आहे.
१०अ+११ब हें उत्तर.	

दुसरें, ३क्ष−२य, ६क्ष+४य, −क्ष−३य, आणि −य−५क्ष; ह्यांची बेरीज कर.

३क्ष−२य	येथें ३क्ष+६क्ष−१क्ष−५क्ष=९क्ष−६क्ष=३क्ष
६क्ष+४य	आणि ४य−२य−३य−१य=४य−६य=−२य
−क्ष−३य	∵ −६य=−४य−२य, ∴ ४य−६य=४य−४य−२य
−५क्ष−य	=०−२य=−२य
३क्ष−२य हें उत्तर.	∴ एकंदर बेरीज ३क्ष−२य

तिसरें, क्ष^{२}−३क्षय+२य^{२}, य^{२}−४क्ष^{२}+क्षय, आणि क्षय−५य^{२}+३क्ष^{२}, ह्यांची बेरीज कर.

क्ष^{२} − ३क्षय + २य^{२}	येथें क्ष^{२} + ३क्ष^{२} − ४क्ष^{२} = ४क्ष^{२} − ४क्ष^{२} = ०
−४क्ष^{२} + क्षय + य^{२}	आणि १क्षय + १क्षय − ३क्षय = २क्षय − ३क्षय = −१क्षय
३क्ष^{२} + क्षय − ५य^{२}	∴ २य^{२} + य^{२} − ५य^{२} = ३य^{२} − ५य^{२} = −२य^{२}
उत्तर, − क्षय − २य^{२}	∴ एकंदर बेरीज − क्षय − २य^{२}

चवथें, २अ + २ब, अ + ३ब, ५अ + ब, आणि ८अ + ब, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, १६अ + ७ब.

पांचवें, २क्ष − ४य, −३क्ष + य, ६क्ष − ५य, आणि २य − क्ष, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, ४क्ष − ६य.

साहावें, २क्ष^{२} + क्षय − २य^{२}, ३क्षय − य^{२} − ४क्ष^{२}, ५य^{२} − क्ष^{२} − ६क्षय, आणि ४क्ष^{२} − क्षय + ३य^{२}, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, क्ष^{२} − ३क्षय + ५य^{२}

सातवें, अक्ष^{२} + बक्ष^{२} − कक्ष, २अक्ष^{२} + ४कक्ष − ५बक्ष^{२}, आणि २बक्ष^{२} − अक्ष^{२} − ८कक्ष, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, २अक्ष^{२} − २बक्ष^{२} − ५कक्ष

आठवें, अ − ब व अ + ब; क्ष^{२} + क्षय व क्षय

+ये; आणि ये—क्ष्ज्ञ व क्ष ज्ञ—ज्ञे; ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, २अ; क्षे + २क्षय + ये; आणि ये—ज्ञे.

वजाबाकी.

(४) समजा कीं, अजवळ ३क्ष रुपये आहेत, व तो ते कधीं खर्चीत नाहीं. आणि बजवळ २क्ष रुपये आहेत, व तो दररोज क्ष रुपये खर्चतो. ह्या उदाहरणांत अचा पैसा दररोज बच्यापेक्षां किती वाढत चालला हें पाहावयाचें आहे.

	१ दिवस	२ दिवस	३ दिवस	४ दिवस	५ दि॰
अचा पैसा	३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष
बचा पैसा	२क्ष	क्ष	०क्ष	—क्ष	—२क्ष
बाकी	क्ष	२क्ष	३क्ष	४क्ष	५क्ष

ह्या सर्व बाक्या अचा पैसा दररोज बच्यापेक्षा पेक्षां किती अधिक होत चालला हें दाखवितात, व ह्या वजाबाकीनें निघाल्या आहेत; परंतु ज्या रकमा वजा करावयाच्या आहेत, त्यांचीं चिन्हें पहिल्यानें बदललीं असतां त्याच बाक्या बेरजेनें ही येतील;

म्हणजे,

	१ दिवस	२ दिवस	३ दिवस	४ दिवस	५ दि०
अचा पैसा	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष	३ क्ष
बचा पैसा	– २ क्ष	– क्ष	– ० क्ष	+ क्ष	+ २ क्ष
बाकी	क्ष	२ क्ष	३ क्ष	४ क्ष	५ क्ष

त्यावरून बीजपदें वजा करण्याचा जो नियम सिद्ध होतो तो लिहितों. तो नियम हा कीं, जीं पदें वजा करावयाचीं असतील त्यांचीं चिन्हें पालटलीं, असें पहिल्यानें मनांत आणून मिळवणीच्या रीतीप्रमाणें उदाहरण करावें.

(५) कोणत्याही पदाच्या पूर्वी – हें चिन्ह असलें म्हणजे तें सर्व पद वजा करावयाचें आहे असें समजावें. जसें, अ–(ब+क); ह्याचा अर्थ असा आहे कीं, (ब+क) हे अ मध्यें वजा करावयाचे आहेत, म्हणून अ–(ब+क)=अ–ब–क. तसेंच, अ–(ब–क+ड)=अ–ब+क–ड आणि क्ष–{अ–(ब–क)}=क्ष–{अ–ब+क}=क्ष–अ+ब–क.

उदाहरणें.

पहिलें, ४ अ − ८ ब − २ क ह्यांतून अ + २ ब − ५ क हें वजा कर.

वजाबाकीचे नियमाप्रमाणें,

४ अ − ८ ब − २ क	+ ४ अ − १ अ = + ३ अ
अ + २ ब − ५ क	− ८ ब − २ ब = − १० ब
	− २ क + ५ क = + ३ क

उत्तर, ३ अ − १० ब + ३ क

ताळा. ४ अ − ८ ब − २ क

दुसरें, २ मक्ष^{२} − नक्ष − ३ पय + र ह्यांतून ५ मक्ष^{२} − ४ नक्ष + पय + क हें वजा कर.

वजाबाकीचे नियमाप्रमाणें

२ मक्ष^{२} − नक्ष − ३ पय + र	२ मक्ष^{२} − ५ मक्ष^{२} = − ३ मक्ष^{२}
५ मक्ष^{२} − ४ नक्ष + पय + क	− नक्ष + ४ नक्ष = + ३ नक्ष
	− ३ पय − १ पय = − ४ पय
उ० − ३ मक्ष^{२} + ३ नक्ष − ४ पय + र − क	आणि र − क = र − क

तिसरें, ६ अ + २ ब − (३ अ + ब) ह्यांतून २ अ + ४ ब − (४ अ − ब) हें वजा कर.

६अ+२ब-३अ-ब
२अ+४ब-४अ+ब

४अ-२ब+अ-२ब=
५अ-४ब हें उत्तर.

येथें -(३अ+ब) आणि -(४अ-ब) हे लिहावयाच्या वेळेस कौंसाच्या बाहेर उणें चिन्ह आहे म्हणून आंतील पदांचीं चिन्हें पहिल्यानें बदलावीं.

चवथें, ५अ-६ब-३क ह्यांतून २अ+३ब-७क हे वजा कर.

उत्तर, ३अ-९ब+४क.

पांचवें, क्ष^2-क्षय ह्यांतून क्षय-य^2 हे वजा कर आणि अ+ब ह्यांतून अ-ब हे वजा कर.

उत्तर. क्ष^2-२क्षय+य^2 आणि २ब.

साहावें, ५न^2+न-२ ह्यांतून ४न^2-३न-२ हे वजा कर.

उत्तर, न^2+४न-१.

सातवें, अय^2-७अ^{2}य-अ-क ह्यांतून +३अय^2-२अ^{2}य+अ-ब हे वजा कर.

उत्तर, -२अय^2-५अ^{2}य-२अ-क+ब.

आठवें, अ^3-अ^{2}ब+२अब^2-ब^3 ह्यांतून २अ^{2}ब-अब^2 हे वजा कर.

उत्तर, अ^3-३अ^{2}ब+३अब^2-ब^3.

गुणाकार.

(९) ३+२ ह्यांस ४ ह्यांनीं गुण.

३+२=५ आणि ५×४=२० हें उत्तर

अथवा प्रकारांतरानें

(३+२)×४=३×४+२×४=१२+८=२० हें उत्तर.

अ+ब ह्यांस ड आणि क ह्यांनीं गुणून त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज कर.

(अ+ब)×क = अक+बक

(अ+ब)×ड = अड+बड

अक+बक+अड+बड हें उ०

ही गुणाकारांची बेरीज व अ+ब ह्यांस क+ड ह्यांनीं गुणिल्यास जो गुणाकार येतो तो ह्या दोहोंत भेद नाहीं; म्हणजे,

अ+ब
क+ड

अक+बक
+अड+बड

अक+बक+अड+बड

येथें अ+ब ह्यांस पहिल्यानें कनें गुणिलें, आणि

मग डनें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

५–३ ह्यांस ६ ह्यांनीं गूण.

५–३ = २ आणि २ × ६ = १२ हें उत्तर.

अथवा (५–३) × ६ = ५×६ – ३×६ = ३० – १८ = १२ हें उत्तर.

अ+ब ह्यांस क आणि ड ह्यांनीं गूण. आणि पहिल्या गुणाकारांतून दुसरा गुणाकार वजा कर.

(अ–ब) × क = अक–बक

(अ–ब) × ड = अड–बड

अक–बक–अड+बड हें उत्तर

ही बाकी अ–ब आणि क–ड ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे; म्हणजे.

अ–ब

क–ड

अक–बक

–अड+बड

अक–बक–अड+बड

येथें अ–ब ह्यांस पहिल्यानें कनें गुणिलें आणि मग डनें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

ह्या उदाहरणाचा विचार करून पाहिला असतां लागलेंच लक्षांत येतें कीं, + ह्यास + ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार + येतो; − ह्यास − ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार + येतो; + ह्यास − ह्यानें किंवा − ह्यास + ह्यानें गुणिलें असतां गुणाकार − येतो; म्हणजे असा नियम निघतो कीं, **सरूप** चिन्हांचा गुणाकार + येतो आणि **विरूप** चिन्हांचा गुणाकार − येतो.

२क्ष त्यांस ३ ह्यांनीं गूण.

२क्ष × ३ = २क्षची तिप्पट = २क्ष + २क्ष + २क्ष = ६क्ष

अथवा, २ × क्ष × ३ = ६क्ष.

२ ह्या वेळाप्रकाशाकास ३ ह्या गुणकानें गुणून त्या गुणाकारापुढें क्ष लिहिला म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

५अ त्यांस २ब त्यांनीं गूण.

५ × अ × २ × ब = ५ × २ × अ × ब = १० अब.

५ आणि २ ह्या वेळाप्रकाशाकांच्या गुणाकारापुढें अ आणि ब हीं अक्षरें लिहावीं म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

$अ^{२}$ त्यास $अ^{३}$ त्यानें गूण.

$अ^{२} = अ \times अ$, आणि $अ^{३} = अ \times अ \times अ$.

$\therefore अ^{२} \times अ^{३} = अ \times अ \times अ \times अ \times अ = अ^{५}$.

अथवा, $अ^{२} \times अ^{३} = अ^{२+३} = अ^{५}$.

२ आणि ३ ह्या घातप्रकाशकांची बेरीज अ पदाच्या घातप्रकाशकाच्या स्थानीं लिहावी, म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

जेथें घातप्रकाशक लिहिला नाहीं, तेथें १ हा घातप्रकाशक आहे असें समजावें. जसें, $अ = अ^{१}$.

ह्यावरून गुणाकाराचे जे सामान्य नियम सिद्ध होतात ते खालीं लिहितों.

गुण्य गुणक पदांचीं चिन्हें सरूप असतील तर गुणाकारास + चिन्ह लिहावें; व तीं विरूप असतील तर − चिन्ह लिहावें. गुण्य गुणक पदांच्या वेळाप्रकाशकांचा गुणाकार घ्यावा. गुण्य गुणक पदांत एकच अक्षर असेल तर, त्यांच्या घातप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी.

उदाहरणें.

पहिलें. $३अ^{२} - ५अब + २ब^{२}$ ह्यांस $अ^{२} - ७अब$ ह्यांनीं गूण.

$$३अ^{२} - ५अब + २ब^{२}$$
$$\underline{अ^{२} - ७अब}$$

$$\begin{array}{r} ३अ^४-५अ^३ब+२अ^२ब^२ \\ -२१अ^३ब+३५अ^२ब^२-१४अब^३ \\ \hline ३अ^४-२६अ^३ब+३७अ^२ब^२-१४अब^३ \end{array}$$ हें उत्तर.

दुसरें. $अ^न-अ^{न-१}ब+अ^{न-२}ब^न$ ह्यांस $अ-ब$ ह्यांनीं गूण.

$$\begin{array}{l} अ^न-अ^{न-१}ब+अ^{न-२}ब^न \\ अ-ब \\ \hline अ^{न+१}-अ^नब+अ^{न-१}ब^न \\ \quad -अ^नब+अ^{न-१}ब^२-अ^{न-२}ब^{न+१} \\ \hline अ^{न-१}-२अ^नब+अ^{न-१}ब^न+अ^{न-१}ब^२-अ^{न-२}ब^{न+१} \end{array}$$

हें उत्तर.

तिसरें. ६अ ह्यांस ४ ह्यांनीं; ३अ ह्यांस ५ब ह्यांनीं; आणि $क्ष^४$ ह्यांस $क्ष^२$ ह्यानें गूण.

उत्तर. २४अ; १५अब; आणि $क्ष^६$.

चवथें. २क्ष−४य+झ त्यांस ३क्ष ह्यांनीं; आणि $अ^२+२अब-ब^२$ ह्यांस $अ^२ब^२$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $६क्ष^२-१२क्षय+३क्षझ$; आणि $अ^४ब^२+२अ^३ब^३-अ^२ब^४$.

पांचवें. $क्ष^३-क्ष^२य+क्षय^२-य^३$ ह्यांस क्ष+य ह्यांनीं;

आणि $अ^{२} + ब^{२} + क^{२} + अब - अक + बक$ ह्यांस $अ - ब + क$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $क्ष^{६} - य^{६}$; आणि $अ^{३} - ब^{३} + क^{३} + ३अबक$

साहावें. $५क्ष^{३} + ४क्ष^{२} + ३क्ष + २$ ह्यांस $५क्ष^{३} - ४क्ष^{२}$ ह्यांनीं; आणि $१ - क्ष + क्ष^{४} - क्ष^{५}$ ह्यांस $१ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $२५क्ष^{६} - क्ष^{४} - २क्ष^{३} - ८क्ष^{२}$; आणि $१ - क्ष^{८}$

सातवें. $अ + ब$ ह्यांस $अ + ब$ ह्यांनीं, $अ - ब$ ह्यांस $अ - ब$ ह्यांनीं, आणि $अ + ब$ ह्यांस $अ - ब$ ह्यांनीं गूण; आणि तीं उत्तरें लक्ष्यांत ठेव.

उत्तर. $(अ + ब)(अ + ब) = अ^{२} + २अब + ब^{२}$;
$(अ - ब)(अ - ब) = अ^{२} - २अब + ब^{२}$;
आणि $(अ + ब)(अ - ब) = अ^{२} - ब^{२}$.

ह्या उदाहरणावरून खालचे नियम निघतात.

१. कोणत्याही दोन संख्यांचे बेरजेचा वर्ग, त्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज त्यांच्या गुणाकाराच्या दुपटींत मिळवून जे येतें, त्या बरोबर आहे.

२. कोणत्याही दोन संख्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग, त्या संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेंत त्यांच्या गुणाकारा-

ची दुप्पट वजा देऊन बाकी जी राहते, तीबरोबर आहे

३ कोणत्याही दोन संख्यांच्या बेरजेचा व वजाबाकीचा गुणाकार त्याच्या वर्गांच्या वजाबाकीबरोबर आहे.

विद्यार्थ्यांनीं ह्या तीन नियमांची चांगली आठवण धरावी.

भागाकार

(१७) भागाकार गुणाकाराची विपरीतक्रिया आहे

∵ $२क्ष \times ३ = ६क्ष$; ∴ $६क्ष \div ३$, अथवा $\frac{६क्ष}{३} = २क्ष$; आणि ∵ $-५क्ष^{४} \times ४क्ष^{२} = -२०क्ष^{६}$; ∴ $\frac{-२०क्ष^{६}}{४क्ष^{२}} = -५क्ष^{४}$.

ह्यावरून भागाकाराचा नियम सिद्ध होतो; तो हा कीं, भाज्यभाजकांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकारास + चिन्ह लिहावें; तीं चिन्हें विरूप असल्यास − चिन्ह लिहावें; भाज्याच्या वेळाप्रकाशकास भाजकाच्या वेळाप्रकाशकानें भागावें; आणि भाज्यभाजकपदांत एकच अक्षर असल्यास भाज्याच्या घातप्रकाशकांत भाजकाचा घातप्रकाशक वजा करावा.

उदाहरणें

पहिलें. $-१८ अ^{३}बक^{५}$ त्यांस $-३ अ^{२}बक^{३}$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{-१८ अ^{३}बक^{५}}{-३ अ^{२}बक^{३}} = ६ अक^{२}$$ हें उत्तर.

त्या उदाहरणांत चिन्हें सरूप आहेत म्हणून भागाकाराचें चिन्ह + समजावें; ३ हे १८ यांतून ६ वेळा जातात; २ हा घातप्रकाशक ३ ह्यांत वजा केल्यास भागाकारांतल्या अस १ हा घातप्रकाशक उरतो; ब हा भाज्यांकांत आणि भाजकांत आहे, म्हणून तो भागाकारांत आला नाहीं, कारण, $\frac{ब}{ब}=१$ आहे; आणि ३ हा घातप्रकाशक पांचांतून वजा केल्यामुळें भागाकारांत कम २ घातप्रकाशक उरतो.

दुसरें. $१२ अ^{३}क्ष^{४}य^{३} - २४ अ^{२}क्ष^{३}य^{४} - १८ क्ष^{३}य + ६ क्षय$ ह्यांस $-६ क्षय$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{१२ अ^{३}क्ष^{४}य^{३} - २४ अ^{२}क्ष^{३}य^{४} - १८ क्ष^{३}य + ६ क्षय}{-६ क्षय} =$$

$-२ अ^{३}क्ष^{३}य^{२} + ४ अ^{२}क्ष^{२}य^{३} + ३ क्ष^{२} - १$ हें उत्तर

तिसरें. $२अ^{६} - ७अ^{५}ब + ७अ^{४}ब^{२} + अ^{३}ब^{३} - १५अ^{२}ब^{४}$ ह्यास $२अ^{३} - ३अ^{२}ब - ५अब^{२}$ ह्यांनी भाग.

$$
\begin{array}{l|l|l}
२अ^{३} & २अ^{६} - ७अ^{५}ब + ७अ^{४}ब^{२} + अ^{३}ब^{३} - १५अ^{२}ब^{४} & अ^{३} \\
-३अ^{२}ब & \underline{२अ^{६} - ३अ^{५}ब - ५अ^{४}ब^{२}} & -२अ^{२}ब \\
-५अब^{२} & \quad -४अ^{५}ब + १२अ^{४}ब^{२} + अ^{३}ब^{३} & +३अब^{२}. \\
 & \quad \underline{-४अ^{५}ब + ६अ^{४}ब^{२} + १०अ^{३}ब^{३}} & \\
 & \qquad ६अ^{४}ब^{२} - ९अ^{३}ब^{३} - १५अ^{२}ब^{४} & \\
 & \qquad \underline{६अ^{४}ब^{२} - ९अ^{३}ब^{३} - १५अ^{२}ब^{४}} &
\end{array}
$$

चवथें. १ ह्यास $१ + २क्ष + क्ष^{२}$ ह्यांनी भाग.

$$
\begin{array}{l}
१ + २क्ष + क्ष^{२}) \; १ \; (१ - २क्ष + ३क्ष^{२} - ४क्ष^{३} + \text{इत्यादि अनंत पर्यंत.} \\
\quad \underline{१ + २क्ष + क्ष^{२}} \\
\quad -२क्ष - क्ष^{२} \\
\quad \underline{-२क्ष - ४क्ष^{२} - २क्ष^{३}} \\
\qquad ३क्ष^{२} + २क्ष^{३} \\
\qquad \underline{३क्ष^{२} + ६क्ष^{३} + ३क्ष^{४}} \\
\qquad -४क्ष^{३} - ३क्ष^{४}
\end{array}
$$

पांचवें. $अ^{२न+१} - अ^{न+१} - अ^{न} + अ^{न-१}$ ह्यास $अ^{न-१}$ ह्यानें भाग.

$$\frac{अ^{२न+१}-अ^{न+१}-अ^{न}+अ^{न-१}}{अ^{न+१}}=अ^{न+२}-अ^{२}-अ+१$$

ह्या भागाकारांत जे घातप्रकाशक आले आहेत ते वजाबाकीनें आले आहेत; म्हणजे,

$$\begin{array}{cccc} २न+१ & न+१ & न & न-१ \\ \underline{न-१} & \underline{न-१} & \underline{न-१} & \underline{न-१} \\ न+२ & २ & १ & ० \end{array}$$

ह्या उदाहरणावरून हे उघड आहे कीं, $अ^{०}=१$

$\because \frac{अ^{न-१}}{अ^{न-१}}=अ^{०}$; परंतु $अ^{न-१}\div अ^{न-१}=१ \therefore अ^{०}=१$

साहावें. $१०अ^{२}$ ह्यांस २ ह्यांनीं; $-१२अक्ष$ ह्यांस ४अ ह्यांनीं; $२०क्ष^{४}य^{३}$ ह्यास $-५क्षय^{२}$ ह्यांनीं; आणि -१२०[illegible] $य^{५}ज्ञ^{४}$ ह्यांस $-१०अ^{२}क्ष^{२}य^{२}ज्ञ^{३}$ ह्यांनीं भाग

उत्तर. $५अ$; $-३क्ष$; $-४क्ष^{३}य$; आणि $१२अ^{२}य^{३}ज्ञ$

सातवें. $२अ^{३}ब^{२}-६अ^{२}ब^{३}+१२अब^{३}क$ ह्यास $२अब^{२}$ ह्यांनीं; आणि $८क्ष^{४}य^{२}-१२क्ष^{३}-१६क्ष$ ह्यांस ४क्ष ह्यांनीं भाग

उत्तर. $अ^{२}-३अब+४ब^{२}क$; आणि $२क्ष^{३}य^{२}-३क्ष^{२}-४$

आठवें. $\frac{\text{२अक्षय} - \text{५क्षय}}{\text{क्षय}}$; $\frac{-\text{६ब}^{२}\text{य} + \text{४अबय} - \text{२०बय}}{-\text{बय}}$

आणि $\frac{\text{४अबक्ष} - \text{३अ}^{२}\text{क्ष} + \text{७अकक्ष}}{\text{अक्ष}}$

उत्तर. २अ−५; ६ब−४अ+२०; आणि ४ब−३अ+७क

नववें. $\text{८क्ष}^{२} + \text{१६अक्ष} + \text{६अ}^{२}$ ह्यांस $\text{४क्ष} + \text{२अ}$ ह्यांनीं; आणि $\text{क्ष}^{४} + \text{क्ष}^{३}\text{य} + \text{क्षय}^{३} + \text{य}^{४}$ ह्यांस $\text{क्ष}^{२} + \text{२क्षय} + \text{य}^{२}$ ह्यांनीं भाग.

उत्तर. $\text{२क्ष} + \text{३अ}$; आणि $\text{क्ष}^{२} - \text{क्षय} + \text{य}^{२}$.

दाहावें. $\text{८क्ष}^{४}\text{य} + \text{२क्ष}^{३}\text{य} - \text{२क्ष}^{२} + \text{३क्ष}^{२}\text{य} + \text{क्ष}$ ह्यांस $\text{४क्ष}^{२}\text{य} + \text{३क्षय} - \text{१}$ ह्यांनीं; आणि $\text{क्ष}^{४} - \text{य}^{४}$ ह्यांस $\text{क्ष} - \text{य}$ ह्यांनीं भाग.

उत्तर. $\text{२क्ष}^{२} - \text{क्ष}$; आणि $\text{क्ष}^{३} - \text{क्ष}^{२}\text{य} + \text{क्षय}^{२} - \text{य}^{३}$.

अकरावें. $\text{१८क्ष}^{३} - \text{३३क्ष}^{२} + \text{४४क्ष} - \text{३५}$ ह्यांस $\text{६क्ष} - \text{७}$ ह्यांनीं; आणि $\text{१} - \text{क्ष}$ ह्यांस $\text{१} + \text{क्ष}$ ह्यांनीं भाग.

उत्तर. $\text{३क्ष}^{२} - \text{२क्ष} + \text{५}$; आणि $\text{१} - \text{२क्ष} + \text{२क्ष}^{२} - \text{२क्ष}^{३} +$ इ०

बारावें. $\frac{\text{अ}^{४} + \text{२अ}^{२}\text{ब}^{२} + \text{ब}^{४}}{\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२}}$; $\frac{\text{क्ष}^{६} - \text{२क्ष}^{३}\text{य}^{३} + \text{य}^{६}}{\text{क्ष}^{३} - \text{य}^{३}}$.

उत्तर $\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२}$; $\text{क्ष}^{३} - \text{य}^{३}$.

नेरावें. $\frac{अ^{म} ब^{न+२} - अ^{म+१} ब^{२न+१} + अ^{म+२} ब^{३न}}{अ^{म-२} ब^{न}}$;

आणि $\frac{४अ^{२}-१}{२अ+१}$

उत्तर. $अ^{२}ब^{२} - अ^{३}ब^{न+१} + अ^{४}ब^{२न}$; $२अ-१$

अनेकप्रकारचीं उदाहरणें.

पहिलें. $क्ष=४$, $य=२$, आणि $ज्ञ=६$ धरून खालच्या तीन पदांच्या संख्या काढ.

(१) $क्ष^{२}+४य-३ज्ञ$. (२) $\frac{२क्ष+६य}{१३} - \frac{ज्ञ}{य}$

(३) $\frac{क्ष(ज्ञ-य)}{२} + \frac{ज्ञ}{क्ष-य}$.

दुसरें. $५अ^{२}ब-२अब^{२}-३अ^{२}ब^{२}$; $२अ^{२}ब^{२}-७अ^{२}ब+५अब$; आणि $अ^{२}ब^{२}-अ^{२}ब$; ह्यांची बेरीज कर.

तिसरें. $२क्ष^{३}-३क्ष^{२}+८क्ष-५$ हे $५क्ष^{३}-क्ष^{२}-२क्ष+१$ ह्यांत वजा कर.

चवथें. $४अ^{२}क्ष^{२}-७अ^{२}क्ष-३अ$ ह्यास $२अक्ष^{२}-अ^{२}$ ह्यांनीं; आणि $अ^{२}+अब+ब^{२}$ ह्यास $अ-ब$ ह्यांनीं गूण.

पांचवें. $क्ष^4+क्ष^2य^2+य^2$ त्यास $क्ष^2+क्षय+य^2$ त्यांनीं; आणि $क्ष^2+य^2$ त्यास $क्ष+य$ त्यांनीं भाग.

साहावें. $अ\sqrt{अक्ष}-ब\sqrt{क्ष}$, $५अ\sqrt{अक्ष}+३ब\sqrt{क्ष}$, $२ब\sqrt{क्ष}-७अ\sqrt{अक्ष}$, आणि $३अ\sqrt{अक्ष}+४ब\sqrt{क्ष}$, त्यांची बेरीज कर; आणि $(३अ-क्ष)क्ष$ त्यांतून $(अ+२क्ष)क्ष$ हे वजा कर.

सातवें. $अ^2-क्ष^2$; $अ^2+२अक्ष+क्ष^2$; $क्ष^4-१$, $४अ^4-९ब^2$; $क्ष^2-८बक्ष+१६ब^2$; आणि $अ^4-ब^4$; त्यांतील प्रत्येकाचीं गुण्यगुणकपदें लिहून दाखवाव.

आठवें. $अक्ष^2-(अ^2+ब)क्ष^2+ब^2$ त्यास $अक्ष-ब$ त्यांनीं भाग; आणि $पक्ष^2+कक्ष-र$ त्यास $मक्ष-न$ त्यांनीं गूण.

नववें. $अ^2-अ$; $मन-म$; $अब^2-अ$; $-बक्ष^2+बकक्ष^2-बेक्ष^2$; आणि $-केक्ष-बक्ष-क्ष$ त्यांतील प्रत्येकाचीं गुण्यगुणकपदें लिहून दाखवाव.

दाहावें. $मन(म+न)$; $क्षय(क्ष-य)$; $(प+र)(प-र)$; $-(र+अब)क्ष$; आणि $अ\{क्ष+(क्ष-१)\}य$; त्यांचे कौंस उडवून दाखीव.

समीकरणें

(८) जेव्हां दोन पदें किंवा पदांचे दोन समूह परस्परांच्या बरोबर असतात तेव्हां त्यांचें समीकरण होतें. जसें, ४×३=७+५ हें समीकरण होय, आणि १०क्ष=६० हेंही समीकरण आहे, ज्यांत क्षची किंमत ६ आहे हें उघड आहे, कारण १०×६=६० आहेत; आणि जर समीकरणाच्या दोहों बाजूंस १० ह्यांनीं भागिलें तर क्ष=६ येतील. पुनः क्ष+५=१५ हें जर एक समीकरण घेतलें आणि त्याच्या दोनही बाजूंतून ५ वजा केले तर क्ष=१० येतील. आणि क्ष−४=२० असें जर एक समीकरण घेतलें व त्याचे दोनही बाजूंत ४ मिळविले तर क्ष=२४ येतील. असेंच जर, क्ष/४=२ हें एक समीकरण घेतलें तर क्षची किंमत ८ येईल, कारण कीं ८चा चवथा हिस्सा २ आहे; आणि जर समीकरणाच्या दोनही बाजूंस ४ नीं गुणिलें तर क्ष=८ येतील.

क्ष+२अ=८अ−२क्ष असें एक दिलेलें समीकरण आहे.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंत २क्ष मिळविल्यानें,

क्ष + २क्ष + २अ = ८अ.

ह्याचे दोन्ही बाजूंतून २अ वजा केल्यानें,

क्ष + २क्ष = ८अ − २अ

मूळ समीकरणाची आणि ह्याची तुलना करून पाहिलें असतां असें दिसतें कीं, २क्ष आणि २अ ह्यां-चीं चिन्हें बदलून त्यांस स्थळांतर केलें, म्हणजे त्यांस एका बाजूंतून काढून दुसऱ्या बाजूंस नेलें.

आतां ∵ क्ष + २क्ष = ३क्ष, आणि ८अ − २अ = ६अ;

∴ ३क्ष = ६अ.

ह्या समीकरणाचे प्रत्येक बाजूस ३ ह्यानें भागल्यानें,

क्ष = २अ येतात, हीक्ष अव्यक्त पदाची किंमत होय.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, समीकरणांत कोणत्याही पदाचें चिन्ह बदलून स्थळांतर केलें असतां चिंता नाहीं, आणि समीकरणाच्या एके बाजूंत जो फारफेर करावा तोच समानता राखण्याकरितां दुसऱ्या बाजूंत केला पाहिजे.

हीं पुढील समीकरणें सोडीव.

१. $\text{क्ष}+\text{३}=\text{१८}-\text{४क्ष}$ उत्तर. $\text{क्ष}=\text{३}$.

२. $\text{क्ष}+\text{३अ}=\text{१८अ}-\text{४क्ष}$. उत्तर. $\text{क्ष}=\text{३अ}$.

३. $\text{४क्ष}-\text{३अ}=\text{३क्ष}+\text{३ब}$. उत्तर. $\text{क्ष}=\text{३}(\text{अ}+\text{ब})$

४. $\text{७}+\text{६क्ष}-\text{४}=\text{१२}+\text{३क्ष}$. उत्तर. $\text{क्ष}=\text{३}$.

५. $\text{४}(\text{क्ष}-\text{२})=\text{१०क्ष}-\text{३८}$. उत्तर. $\text{क्ष}=\text{५}$.

६. $\text{अक्ष}+\text{क}=\text{अ}-\text{बक्ष}$. उत्तर. $\text{क्ष}=\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{अ}+\text{ब}}$.

७. $\frac{\text{य}}{\text{१२}}-\text{८}=-\text{६}$ उत्तर. $\text{य}=\text{२४}$.

८. $\text{५अज्ञ}-\text{१}=\text{२अ}(\text{ज्ञ}+\text{ब})$ उत्तर. $\text{ज्ञ}=\frac{\text{२अब}+\text{१}}{\text{३अ}}$.

प्रश्न.

१. एके मनुष्यानें २१ रुपयांस वांसरासुद्धां एक गाय विकत घेतली, व त्यांत गाईची किंमत वांसराच्या साहा पट होती, तर एकेकाची किंमत काय?

वांसराची किंमत दाखवायास क्ष रुपये घे;

तर ∵ गाईची किंमत वांसराचे साहा पट आहे,

∴ ६ क्ष ही तिची किंमत आहे.

परंतु, प्रश्नाप्रमाणें गाईची किंमत + वांसराची किंमत = २१ रुपये आहेत.

∴ ६ क्ष + क्ष = २१

म्हणजे, ७ क्ष = २१

∴ क्ष = ३ रुपये = वांसराची किंमत

आणि ६ क्ष = १८ रुपये = गाईची .....

२. अ जवळ १०० रुपये होते आणि ब जवळ ४८ रुपये होते; ब नें कांहीं पैसा लोकांस वाटला, आणि अ नें त्याच्या दुप्पट वाटला, आणि मग अ जवळ ब च्या तिप्पट पैसा राहिला. तर प्रत्येकानें किती किती पैसा वाटला?

ब नें जे रुपये वाटले ते = क्ष रुपये

तर अ नें .... २ क्ष.

आतां प्रत्येकाचा पैसा − त्यानें जितका पैसा वाटला तो = त्याजवळ जी बाकी राहिली ती.

∴ १०० − २ क्ष = अ जवळची बाकी,

आणि ४८ − क्ष = ब ....

परंतु प्रश्नांत सांगितलें आहे कीं, अ ची शिल्लक ब च्या शिलकेच्या तिप्पट आहे.

∴ १०० − २ क्ष = ३(४८ − क्ष) = १४४ − ३ क्ष,

स्थलांतरानें, ३ क्ष − २ क्ष = १४४ − १००;

म्हणजे, क्ष = ४४ रुपये = बनें वांटलेला पैसा,

आणि २ क्ष = ८८ रुपये = अनें ....

३. अ, ब, आणि क, ह्या तिघांस ६०० रुपये वांटून दे, ते असे कीं, अच्या हिशाच्या दुप्पट बस मिळतील, आणि अ आणि ब ह्या दोघांच्या हिशांचे बेरजेबरोबर कस मिळतील.

उत्तर. अ १०० रुपये, ब २०० रु०, आणि क ३०० रु०

४. अशा दोन संख्या काढ कीं, ज्यांची वजाबाकी ७ असावी, आणि मोठ्या संख्येच्या तिपटीची आणि धाकट्या संख्येच्या आठपटीची वजाबाकी ६ असावी.

उत्तर. १० आणि ३

५. एक मजूर आणि त्याचा मुलगा हे दोघे मिळून ९६ रुपये मिळवितात, परंतु मजुरास मुलाच्या पांचपट मिळतात; तेव्हां एकेक किती किती मिळवितो?

उत्तर. मजूर ८० रु०, मूल १६ रु०

६. लोखंडी सडक बांधायाच्या कामांत अ आणि ब ह्या दोहों मनुष्यांनीं सारखा पैसा घातला; त्यांत अस ७०० रुपये नफा झाला, आणि बस ४५ रुपये तोटा झाला, नंतर पाहातात तों बच्या साहापट पैसा

अजवळ झाला; तेव्हां एकेकानें किती किती पैसा घातला?

उत्तर. ६०० रुपये.

७. अ फूट लांबीची एक दोरी आहे तिचे असे दोन तुकडे करायाचे आहेत कीं, एक तुकडा दुसऱ्या तुकड्याच्या लांबीच्या ब पट लांब होईल; तेव्हां एकेका तुकड्याची लांबी किती?

उत्तर. $\begin{cases} \text{धाकटा तुकडा} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}+1} \text{ फूट}, \\ \text{आणि मोठा तुकडा} = \frac{\text{अब}}{\text{ब}+1} \text{ फूट}. \end{cases}$

जेव्हां अ=२० आणि ब=४ तेव्हां त्या तुकड्यांची लांबी किती आहे?

उत्तर ४ आणि १६

प्रकरण २

अपूर्णबीजपद

(९) बीजांतील अपूर्ण पदें आणि अंकगणितांतील अपूर्णांक ह्यांचें स्वरूप एकच आहे, म्हणून एकास जे नियम लागू पडतात तेच दुसऱ्यासही लागू पडतात. असें समज कीं, एका नारिंगाच्या फळाचे ब संख्ये इतके सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं

अ तुकडे घ्यावयाचे आहेत तर ते तुकडे, त्याचे आठ सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं पांच तुकडे घ्यावयाचे असले म्हणजे ते जसे $\frac{५}{८}$ ह्या अपूर्णसंख्येनें दाखवितों, तसेंच $\frac{अ}{ब}$ ह्या अपूर्णपदानें दाखवितों.

∵ $\frac{अ}{ब}$ हें अपूर्णपद अस बनें भागून जो भागाकार येतो तो दाखवितें, आणि ∵ भागाकार × भाजक = भाज्य

$$\therefore \frac{अ}{ब} \times ब = अ ;$$

म्हणजे, जर आपण एखाद्या अपूर्णपदास त्याचे छेदानें गुणिलें, तर आपणास त्या पदाचा अंश मिळतो.

वरील समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस ननें गुण, तर

$$न ब \times \frac{अ}{ब} = न अ$$

$$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{न अ}{न ब} ;$$

म्हणजे, कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंश आणि छेद ह्यांस एकाच पदानें गुणिलें असतां त्याची किंमत बदलत नाहीं

कुरलरी. ∵ $\frac{\text{नअ}}{\text{नब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$, ∴ कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंशास आणि छेदास एकाच संख्येनें भागिलें असतां त्याची किंमत बदलत नाहीं.

उदाहरणें.

१. $\frac{\text{क्ष}}{२}$ ह्यांस २ ह्यांनीं; $\frac{\text{क्ष}}{३}$ ह्यांस १२ ह्यांनीं; $\frac{२\text{य}}{५}$ ह्यांस १५ ह्यांनीं; आणि $\frac{३\text{य}}{४}$ ह्यांस ५ क्ष ह्यांनीं गुण.

$\frac{\text{क्ष}}{२} \times २ = \text{क्ष}$, ∵ कोणत्याही वस्तूच्या अर्धाची दुप्पट = ती सर्व वस्तू.

$\frac{\text{क्ष}}{३} \times १२ = ४\text{क्ष}$, ∵ कोणत्याही वस्तूच्या तृतीयांशाची १२ पट = १२ तृतीयांश = त्या वस्तूची ४ पट.

ह्यावरून असें दिसतें की, आपणास कोणत्याही अपूर्णपदास एकाद्या संख्येनें गुणायाचें आहे तर गुणायाचे पूर्वीं त्या संख्येस अपूर्णपदाचे छेदानें (जर निःशेष भागितां येईल तर), भागिलें असतां चिंता नाहीं.

$\frac{२\text{य}}{५} \times १५ = ६\text{य}$, ∵ $\frac{२}{५}$ ह्यांची १५ पट = $\frac{३०}{५} = ६$, अथवा ∵ $१५ \div ५ = ३$, आणि $२\text{य} \times ३ = ६\text{य}$.

$\frac{३\text{य}}{४} \times ५\text{क्ष} = \frac{१५\text{क्षय}}{४}$, ∵ $\frac{३}{४}$ ह्यांची ५ पट = $\frac{१५}{४}$, आणि $\text{य} \times \text{क्ष} = \text{क्षय}$.

२. $\frac{क्ष}{३} + \frac{३क्ष}{४} - \frac{५क्ष}{६} + \frac{३क्ष}{८} - \frac{७क्ष}{१२}$ ह्यांस २४ ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकाराची बेरीज घे.

उत्तर. $८क्ष + १८क्ष - २०क्ष + ९क्ष - १४क्ष = क्ष$.

३. $\frac{३य}{२} - \frac{२य}{५} - \frac{य}{४} + \frac{७य}{१०} - \frac{५य}{४}$ ह्यांस २० ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. ६य.

४. $\frac{४}{क्ष} - \frac{७}{२क्ष} + \frac{३}{८क्ष} - \frac{१}{४क्ष} + \frac{३}{२}$ ह्यांस ८ क्ष. ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. $१२क्ष - ११$.

५. $\frac{क्ष^{३}}{५} + \frac{५}{क्ष} - \frac{क्ष}{१०} - \frac{२}{क्ष^{२}} + ३$ ह्यांस $१०क्ष^{२}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $क्ष^{४} + ३०क्ष^{३} + ५०क्ष - २०$.

हीं उदाहरणं केल्यानें विद्यार्थ्यांस समीकरणांचे छेद सोडवितां येतील.

दृढभाजक.

(१०) कोणत्याही पदाचा भाजक[+] तोच होय कीं ज्यानें

\+ येथें भाजक हा शब्द बराबर नाहीं. कारण, ह्याचा अर्थ ज्यानें आपण भागतों तो इतकाच आहे, म्हणून सामान्य मोप किंवा दुसरा कांहीं तरी वरील अर्थसूचक शब्द असावा; परंतु हा शब्द फार दिवस प्रचारांत आहे म्हणून तोच येथें घेतला आहे.

त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो. जसें, २ हा २अ चा भाजक आहे; अक्ष हा अक्ष^{2} ह्याचा भाजक आहे; अ+ब हा (अ+ब)अ ह्याचा भाजक आहे.

दोन किंवा अधिक पदांचा सामान्य भाजक तोच होय, की ज्यानें त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो; आणि त्यांचा दृढ भाजक तोच होय की, जो त्यांच्या सामान्य भाजकांमध्यें अति मोठा असतो. जसें, अ हा २अ, ६ अक्ष आणि ४ अक्ष^{2}, ह्यांचा सामान्य भाजक आहे; आणि त्यांचा दृढभाजक २अ हा आहे. असेंच, ३(अ+ब) हा ६(अ+ब)^{2}, ९(अ^{2}–ब^{2}), आणि १२(अ^{3}–ब^{3}) ह्यांचा दृढभाजक आहे, कारण ६(अ+ब)^{2} = ६(अ+ब)(अ+ब), ९(अ^{2}–ब^{2}) = ९(अ+ब)(अ–ब), आणि १२(अ^{3}–ब^{3}) = १२(अ+ब)(अ^{2}–अब+ब^{2}); येथें ३(अ+ब) हा दृढभाजक आहे, हें उघडच आहे.

७. ह्याप्रकारें पदांचे निरनिराळे तुकडे करण्याची रीति विद्यार्थ्यांस त्या पदांचा दृढभाजक काढण्यास फार

उपयोगीं पडते

उदाहरणें.

१. $क्ष^{२}+२क्ष-३$ आणि $क्ष^{२}+५क्ष+६$ ह्यांचा दृढभाजक काढ.

$$क्ष^{२}+२क्ष-३ = क्ष^{२}+३क्ष-क्ष-३ = (क्ष+३)क्ष-(क्ष+३)$$
$$= (क्ष-१)(क्ष+३)$$
$$क्ष^{२}+५क्ष+६ = क्ष^{२}+३क्ष+२क्ष+६ = क्ष(क्ष+३)+२(क्ष+३)$$
$$= (क्ष+२)(क्ष+३)$$

∴ $क्ष+३$ हा त्यांचा दृढभाजक आहे.

$क्ष^{२}+२क्ष-३$ आणि $क्ष^{२}+५क्ष+६$ हीं जर एकाद्या अपूर्ण पदाचीं अंशछेदात्मक पदें असतील तर त्यांच्या अंशास आणि छेदास ह्यांच्या $क्ष+३$ ह्या दृढभाजकानें भागिलें असतां त्या अपूर्णपदास अतिसंक्षेपरूप देतां येईल; म्हणजे,

$$\frac{क्ष^{२}+२क्ष-३}{क्ष^{२}+५क्ष+६} = \frac{(क्ष+३)(क्ष-१)}{(क्ष+३)(क्ष+२)} = \frac{क्ष-१}{क्ष+२}$$

= ह्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप.

२. $\frac{क्ष^{३}-६क्ष^{२}+११क्ष-६}{क्ष^{३}+४क्ष^{२}+क्ष-६}$ ह्या अपूर्ण पदाच्या अति-

छेदांचा दृढभाजक काढ, आणि त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{\text{क्ष}^{३} - \text{६क्ष}^{२} + \text{११क्ष} - \text{६}}{\text{क्ष}^{३} + \text{४क्ष}^{२} + \text{क्ष} - \text{६}} = \frac{\text{क्ष}^{३} - \text{क्ष}^{२} - \text{५क्ष}^{२} + \text{५क्ष} + \text{६क्ष} - \text{६}}{\text{क्ष}^{३} - \text{क्ष}^{२} + \text{५क्ष}^{२} - \text{५क्ष} + \text{६क्ष} - \text{६}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^{२}(\text{क्ष}-\text{१}) - \text{५क्ष}(\text{क्ष}-\text{१}) + \text{६}(\text{क्ष}-\text{१})}{\text{क्ष}^{२}(\text{क्ष}-\text{१}) + \text{५क्ष}(\text{क्ष}-\text{१}) + \text{६}(\text{क्ष}-\text{१})} = \frac{(\text{क्ष}-\text{१})(\text{क्ष}^{२}-\text{५क्ष}+\text{६})}{(\text{क्ष}-\text{१})(\text{क्ष}^{२}+\text{५क्ष}+\text{६})}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^{२}-\text{५क्ष}+\text{६}}{\text{क्ष}^{२}+\text{५क्ष}+\text{६}}$$ हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि $\text{क्ष}-\text{१}$ हा दृढभाजक.

३. $\frac{\text{क्ष}^{२} - \text{९क्ष} + \text{२०}}{\text{क्ष}^{२} + \text{६क्ष} - \text{५५}}$ त्या अपूर्णपदाच्या अंशछेदांचा दृढभाजक काढून त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{\text{क्ष}^{२} - \text{९क्ष} + \text{२०}}{\text{क्ष}^{२} + \text{६क्ष} - \text{५५}} = \frac{\text{क्ष}^{२} - \text{५क्ष} - \text{४क्ष} + \text{२०}}{\text{क्ष}^{२} - \text{५क्ष} + \text{११क्ष} - \text{५५}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-\text{५}) - \text{४}(\text{क्ष}-\text{५})}{\text{क्ष}(\text{क्ष}-\text{५}) + \text{११}(\text{क्ष}-\text{५})} = \frac{(\text{क्ष}-\text{५})(\text{क्ष}-\text{४})}{(\text{क्ष}+\text{११})(\text{क्ष}-\text{५})} = \frac{\text{क्ष}-\text{४}}{\text{क्ष}+\text{११}}$$ हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि $\text{क्ष}-\text{५}$ हा दृढभाजक.

४. $\frac{\text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{२}\text{य} + \text{क्षय}^{२} + \text{य}^{३}}{\text{क्ष}^{४} - \text{य}^{४}}$ त्या अपूर्णपदाचे अंशछेदांचा दृढभाजक काढून त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\frac{\text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{२}\text{य} + \text{क्षय}^{२} + \text{य}^{३}}{\text{क्ष}^{४} - \text{य}^{४}} = \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}) + \text{य}(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})}{(\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२})(\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२})} = \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२}}$$

हें त्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि $\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}$ हा दृढभाजक.

५. $\dfrac{\text{अब}+२\text{अ}^२-३\text{ब}^२-४\text{बक}-\text{अक}-\text{क}^२}{९\text{अक}+२\text{अ}^२-५\text{अब}+४\text{क}^२+८\text{बक}-१२\text{ब}^२}$ ह्या

अपूर्णपदाचे अंशच्छेदांचा दृढभाजक काढून ह्यास अतिसंक्षेप रूप दे.

$$\frac{\text{अब}+२\text{अ}^२-३\text{ब}^२-४\text{बक}-\text{अक}-\text{क}^२}{९\text{अक}+२\text{अ}^२-५\text{अब}+४\text{क}^२+८\text{बक}-१२\text{ब}^२}$$

$$=\frac{२\text{अ}^२+\text{अक}+३\text{अब}-२\text{अब}-\text{बक}-३\text{ब}^२-२\text{अक}-\text{क}^२-३\text{बक}}{२\text{अ}^२-८\text{अब}+८\text{अक}+\text{अक}-४\text{बक}+४\text{क}^२+३\text{अब}-१२\text{ब}^२+१२\text{बक}}$$

$$=\frac{\text{अ}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})-\text{ब}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})-\text{क}(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}{२\text{अ}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})+\text{क}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})+३\text{ब}(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})}$$

$$=\frac{(\text{अ}-\text{ब}-\text{क})(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}{(\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क})(२\text{अ}+\text{क}+३\text{ब})}=\frac{\text{अ}-\text{ब}-\text{क}}{\text{अ}-४\text{ब}+४\text{क}}$$ हें त्या

अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप, आणि (२अ+क+३ब) हा दृढभाजक.

(११) जेव्हां एक पद दुसऱ्या पदांत बाकी न राहतां कितीएक वेळां जातें तेव्हां त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाची तितकीपट आहे असें म्हणतात; जसें ६अ हें २अची ३ पट आहे, आणि नक्ष ही क्षची नपट आहे.

जर एक पद दुसऱ्या पदास निःशेष भागितें तर तें पद त्या दुसऱ्या पदाच्या कोणत्याही पटीसही निःशेष भागील. असें समज कीं ब, अमध्यें म वेळां जातो,

तर अ = मब, आणि न अ ही अवीनपद आहे, ता न अ = न म ब ; म्हणून ब, न अ मध्यें न म वेळां जातो.

जर एक पद दुसऱ्या दोन पदांस निःशेष भागितें तर ते पद त्यांच्या बेरजेस आणि वजाबाकीस ही निःशेष भागील. जर क्ष, अ मध्यें म वेळां आणि ब मध्यें न वेळां जातो, तर अ = मक्ष, आणि ब = नक्ष, ∴ अ±ब = मक्ष ± नक्ष = (म±न) क्ष, म्हणून (अ+ब) ह्या बेरजेंत क्ष, (म+न) वेळां जातो आणि (अ−ब) ह्या वजाबाकींत (म−न) वेळां जातो.

आतां आपणास दोन संख्यांचा दृढभाजक काढण्याचा एक साधारण नियम बांधितां येईल.

ज्या दोन संख्यांचा दृढभाजक काढावयाचा आहे त्या दाखविण्यास अ आणि ब घे, आणि ज्यांत अ > ब म्हणजे अ, ब पेक्षां अधिक आहे असे मान.

असें समज कीं, ब, अ मध्यें प वेळां जाऊन बाकी क राहतो; तर अ = पब + क,

आणखी असें समज कीं क, ब मध्यें क वेळां

जाऊन बाकी ड राहतो; तर ब = कक+ड.

आणखी असें समजकीं ड, कमध्यें र वेळां जाऊन बाकी • राहते, तर क = डर.

ब) अ (प
पब
क) ब (क
कक
ड) क (ड
डर
०

आतां ∵ ड, कस निःशेष भागितो, ∴ ड, ककस आणि कक+ड त्यास म्हणजे बस निःशेष भागितो;

∴ ड, पबस आणि पब+क त्यास म्हणजे अ-स निःशेष भागितो.

त्यावरून हें उघड आहे कीं, शेवटला भाजक ड, अस आणि बस निःशेष भागितो म्हणून ड हा त्यांचा दृढभाजक आहे.

कारण ड हा त्यांचा दृढभाजक आहे असें

मान तर,

∵ तो अस आणि बस निःशेष भागितो, ∴ तो अ आणि पब, आणि (अ-पब) म्हणजे क, ह्यांस ही प्रत्येकीं निःशेष भागितो.

∴ तो कम आणि ब-ककस म्हणजे डस निःशेष भागतो.

म्हणून अ आणि ब त्यांचा जो दृढभाजक ड' हा डस निःशेष भागितो;

आणि ∵ ड हा अ आणि ब त्यांचा साधारण भाजक आहे आणखी ∵ जो दृढभाजक डस निःशेष भागितो तो ड बरोबर असला पाहिजे.

∴ ड'=ड; म्हणून शेवटला भाज्य जो ड तोच दृढभाजक आहे.

ह्यावरून असा नियम निघतो कीं, मोठ्या संख्येस धाकट्या संख्येनें भाग आणि त्या भाजकास बाकीनें भाग, असें, बाकी शून्य राही तोंपर्यंत कर; शेवटला जो भाज्य तो दृढभाजक होईल.

हा नियम दाहाव्या कलमांतील उदाहरणांस लागू आहे.

लघुत्तमसाधारण गुणाकार.

कोणत्याही पदांचा साधारण गुणाकार तोच होय, कीं ज्यास त्या पदांनीं भागिलें असतां बाकी राहात नाहीं, आणि त्यांचा लघुत्तमसाधारण गुणाकार तोच होय कीं जो साधारण गुणाकारांत अति लहान असतो.

अ आणि ब ह्या पदांचा साधारण भाजक म आहे आणि $\frac{अ}{म}=प$, आणि $\frac{ब}{म}=फ$ आहे, असें मान; तर गुणाकारानें $\frac{अब}{म^२}=पफ$, $\frac{अब}{म}=मपफ=अफ$ किंवा पब.

$\therefore$ $\frac{अब}{म}$ हा अ आणि ब ह्यांचा साधारण गुणाकार आहे. परंतु म जेव्हां अतिमोठा आहे तेव्हां $\frac{अब}{म}$ अति लहान आहे; म्हणजे,

$$\frac{अब}{दृढभाजक}=\text{अ आणि ब ह्यांचा लघुत्तमसाधारण}$$

गुणाकार.

ह्यावरून असा नियम निघतो, कीं दोनपदांचा गुणाकार घेऊन त्या गुणाकारास त्यांच्या दृढभाजकानें भागावें, जो भागाकार तो त्यांचा लघुत्तमसाधा-

रण गुणाकार होईल.

किती ही जरी पदें असलीं तरी त्याविषयीं वरचे प्रमाणेंच सिद्ध करतां येईल

लघुत्तमसाधारण गुणाकार बहुतकरून अटकळीनें ही काढतां येईल.

उदा० १. $\frac{३क्ष^{३} - ३क्ष^{२}य + क्षय^{२} - य^{३}}{४क्ष^{२} - क्षय - ३य^{२}}$ ह्या अपूर्ण पदाच्या अंशछेदांचा दृढभाजक काढ, आणि त्यास अतिसंक्षेप रूप दे.

येथें ४क्ष^२, ३क्ष^३ ह्यांत जात नाहींत म्हणून भागाकार करण्याच्या अगोदर अंशास ४ ह्यांनीं गूण; चार हा गुणक एकाच पदास म्हणजे अंशास लावल्यानें दृढभाजकास काहीं बाध येणार नाहीं हें अगदीं स्पष्ट आहे.

$$४क्ष^{२} - क्षय - ३य^{२})\ १२क्ष^{३} - १२क्ष^{२}य + ४क्षय^{२} - ४य^{३}\ (३क्ष - ९य$$

$$१२क्ष^{३} - ३क्ष^{२}य - ९क्षय^{२}$$

$$- ९क्ष^{२}य + १३क्षय^{२} - ४य^{३}$$ त्यास ४ ह्यांनी गूण.

$$- ३६क्ष^{२}य + ५२क्षय^{२} - १६य^{३}$$

$$- ३६क्ष^{२}य + ९क्षय^{२} + २७य^{३}$$

$$४३क्षय^{२} - ४३य^{३}$$

ह्यांतून ४३य हा गुणक काढून टाक

$$क्ष-य)\ ४क्ष^२-क्षय-३य^२\ (४क्ष+३य$$
$$४क्ष^२-४क्षय$$
$$३क्षय-३य^२$$
$$३क्षय-३य^२$$

∴ क्ष-य हा दृढभाजक आहे, आणि त्यानें अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस भागल्यानें,

$$\frac{३क्ष^३-३क्ष^२य+क्षय^२-य^३}{४क्ष^२-क्षय-३य^२}=\frac{३क्ष^२+य^२}{४क्ष+३य}$$ हें उत्तर.

उदा० २. असें दाखवा कीं, $\frac{क्ष^६+क्ष^{-२}-(क्ष^{-६}+क्ष^२)}{क्ष^३+क्ष-(क्ष^{-३}+क्ष^{-१})}=\frac{क्ष^४+क्ष^{-४}}{क्ष+क्ष^{-१}}$

$$\frac{क्ष^६+क्ष^{-२}-(क्ष^{-६}+क्ष^२)}{क्ष^३+क्ष-(क्ष^{-३}+क्ष^{-१})}=\frac{क्ष^{-२}(क्ष^८+१)-क्ष^{-६}(१+क्ष^८)}{क्ष(क्ष^२+१)-क्ष^{-३}(१+क्ष^२)}$$

$$=\frac{(क्ष^{-२}-क्ष^{-६})(१+क्ष^८)}{(क्ष-क्ष^{-३})(१+क्ष^२)}=\frac{क्ष^{-६}(क्ष^४-१)(१+क्ष^८)}{क्ष^{-३}(क्ष^४-१)(१+क्ष^२)}$$

$$=\frac{क्ष^{-४}(१+क्ष^८)}{क्ष^{-१}(क्ष^२+१)}=\frac{क्ष^४+क्ष^{-४}}{क्ष+क्ष^{-१}}$$ हें उत्तर.

ह्या पुढील पदांचे दृढभाजक काढ.

१. $क्ष^२+क्ष-२$ आणि $क्ष^२+२क्ष-३$

उत्तर. क्ष-१

२. $६अ^२ + ११ अक्ष + ३क्ष^२$ आणि $६अ^२ + ७अक्ष − ३क्ष^२$. उत्तर $२अ + ३क्ष$.

३. $८अ^३ब^२ − १०अब^३ + २ब^४$ आणि $१०अ^४ब − १०अ^३ब^२ + २अ^३ब^२ − ३अब^४$. उत्तर $अब − ब^२$.

४. $क्ष^३ + २क्ष^२ + २क्ष + १$ आणि $क्ष^३ − २क्ष − १$.

उत्तर $क्ष + १$.

५. $२क्ष^२ − क्षय − ६य^२$ आणि $३क्ष^२ − ८क्षय + ४य^२$.

उत्तर $क्ष − २य$.

६. $२क्ष^३ − ३क्ष^२ − २क्ष + ३$ आणि $३क्ष^४ + २क्ष^३ − २क्ष^२ − २क्ष − १$. उत्तर $क्ष^२ − १$.

ह्या पुढील अपूर्णपदांस अतिसंक्षेपरूप दे

७. $\frac{क्ष^२ + २अक्ष + अ^२}{क्ष^२ − अ^२}$ आणि $\frac{क्ष^२ − २क्षय + य^२}{क्ष^२ − य^२}$.

उत्तर $\frac{क्ष + अ}{क्ष − अ}$ आणि $\frac{क्ष − य}{क्ष + य}$

८. $\frac{अ^३ + ब^३}{(अ + ब)^२}$ आणि $\frac{(अ + ब)^३}{अ^२ − ब^२}$

उत्तर $\frac{अ^२ − अब + ब^२}{अ + ब}$ आणि $\frac{(अ + ब)^२}{अ − ब}$.

९. $\frac{\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}-२}{२\text{क्ष}^{२}-३\text{क्ष}+१}$ आणि $\frac{\text{क्ष}^{३म}+\text{क्ष}^{२म}-२}{\text{क्ष}^{३म}+\text{क्ष}^{म}-२}$.

उत्तर $\frac{\text{क्ष}+२}{२\text{क्ष}-१}$ आणि $\frac{\text{क्ष}^{२म}+२\text{क्ष}^{म}+२}{\text{क्ष}^{म}+२}$

१०. $\frac{\text{क्ष}^{३}-\text{क्ष}^{२}\text{य}-\text{क्षय}^{२}+\text{य}^{३}}{\text{क्ष}^{२}-\text{य}^{२}}$ आणि $\frac{३\text{क्ष}^{३}-२२\text{क्ष}-१५}{२\text{क्ष}^{३}-१७\text{क्ष}^{२}+१८\text{क्ष}}$.

उत्तर $\frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{क्ष}+\text{य}}$ आणि $\frac{३\text{क्ष}^{२}+९\text{क्ष}+५}{२\text{क्ष}^{३}-२\text{क्ष}^{२}-६\text{क्ष}}$.

बीजांतील अपूर्णपदांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार.

उदाहरणं.

१. $\frac{२\text{क्ष}-५}{३}$ आणि $\frac{\text{क्ष}^{२}-१}{२\text{क्ष}}$ ह्यांची बेरीज कर.

येथं छेदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार ६क्ष आहे, आणि पहिल्या अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस २क्ष ह्यांनीं आणि दुसऱ्याच्या दोन्ही पदांस ३ ह्यांनीं गुणलें म्हणजे दोनही अपूर्णपदें समच्छेद होतील; म्हणजे

$$\left.\begin{aligned}\frac{२क्ष-५}{३}\times\frac{२क्ष}{२क्ष}&=\frac{४क्ष^{२}-१०क्ष}{६क्ष}\\ \frac{क्ष-१}{२क्ष}\times\frac{३}{३}&=\frac{३क्ष-३}{६क्ष}\end{aligned}\right\}\therefore\frac{४क्ष^{२}-७क्ष-३}{६क्ष}\text{ ही बेरीज.}$$

२. $\frac{अ}{२}-\frac{ब}{३}+\frac{क}{५}$, $\frac{अ}{४}-\frac{ब}{५}-\frac{क}{३}$, आणि $\frac{अ}{३}+\frac{ब}{४}+\frac{क}{२}$ ह्या अपूर्णपदांची बेरीज करा.

$$\left.\begin{aligned}\frac{अ}{२}-\frac{ब}{३}+\frac{क}{५}&=\frac{६अ}{१२}-\frac{२०ब}{६०}+\frac{६क}{३०}\\ \frac{अ}{४}-\frac{ब}{५}-\frac{क}{३}&=\frac{३अ}{१२}-\frac{१२ब}{६०}-\frac{१०क}{३०}\\ \frac{अ}{३}+\frac{ब}{४}+\frac{क}{२}&=\frac{४अ}{१२}+\frac{१५ब}{६०}+\frac{१५क}{३०}\end{aligned}\right\}\therefore\frac{१३अ}{१२}-\frac{१७ब}{६०}+\frac{११क}{३०}\text{ ही बेरीज}$$

३. $\frac{५क्ष^{२}}{२}-\frac{७य^{२}}{३}$, $-\frac{४क्ष^{२}}{३}+\frac{५य^{२}}{२}$, आणि $\frac{७क्ष^{२}}{४}-\frac{३य^{२}}{२}$ ह्या अपूर्णपदांची बेरीज घ्या.

$$\left.\begin{aligned}\frac{५क्ष^{२}}{२}-\frac{७य^{२}}{३}&=\frac{३०क्ष^{२}}{१२}-\frac{१४य^{२}}{६}\\ -\frac{४क्ष^{२}}{३}+\frac{५य^{२}}{२}&=\frac{-१६क्ष^{२}}{१२}+\frac{१५य^{२}}{६}\\ \frac{७क्ष^{२}}{४}-\frac{३य^{२}}{२}&=\frac{२१क्ष^{२}}{१२}-\frac{९य^{२}}{६}\end{aligned}\right\}\therefore\frac{३५क्ष^{२}}{१२}-\frac{८य^{२}}{६}=२\frac{११}{१२}क्ष^{२}-१\frac{१}{३}य^{२}=\text{ बेरीज.}$$

४. $\frac{३}{४(१-क्ष)^२} + \frac{३}{८(१-क्ष)} + \frac{१}{८(१-क्ष)} - \frac{१-क्ष}{४(१+क्ष^२)}$

ह्यांचें एक अपूर्ण पद कर .

दुसरें आणि तिसरें अपूर्णपद घे आणि तीं समच्छेद करून आद

$$\frac{३}{८(१-क्ष)} \times \frac{१+क्ष}{१+क्ष} = \frac{३+३क्ष}{८(१-क्ष^२)}$$

$$\frac{१}{८(१+क्ष)} \times \frac{१-क्ष}{१-क्ष} = \frac{१-क्ष}{८(१-क्ष^२)}$$

ह्यांची बेरीज घेतल्यानें, $\frac{४+२क्ष}{८(१-क्ष^२)} = \frac{२+क्ष}{४(१-क्ष^२)}$

हें पद आणि चवथें अपूर्ण पद घेऊन तीं समच्छेद कर

$$\frac{२+क्ष}{४(१-क्ष^२)} \times \frac{१+क्ष^२}{१+क्ष^२} = \frac{क्ष^३+२क्ष^२+क्ष+२}{४(१-क्ष^४)}$$

$$\frac{१-क्ष}{४(१+क्ष^२)} \times \frac{१-क्ष^२}{१-क्ष^२} = \frac{१-क्ष-क्ष^२+क्ष^३}{४(१-क्ष^४)}$$

ह्यांची वजाबाकी घेतल्यानें, $\frac{३क्ष^२+२क्ष+१}{४(१-क्ष^४)}$

हें पद आणि पहिलें अपूर्ण पद घे आणि ह्यांचा छेदां-

चा लघुतमसाधारणगुणाकार काढून हीं समच्छेद कर

$$४(१-क्ष)\overline{)\,४(१-क्ष)^२,\ ४(१-क्ष^२)\cdot(१+क्ष^२)}$$
$$(१-क्ष)(१+क्ष)(१+क्ष^२) = ४(१-क्ष)(१-क्ष^२)$$
$$= ल॰ सा॰ गु॰$$

$$\frac{३}{४(१-क्ष)^२} \times \frac{१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३}{१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३} = \frac{३+३क्ष+३क्ष^२+३क्ष^३}{४(१-क्ष)(१-क्ष^४)}$$

$$\frac{१+२क्ष+३क्ष^२}{४(१-क्ष^४)} \times \frac{१-क्ष}{१-क्ष} = \frac{१+क्ष+क्ष^२-३क्ष^३}{४(१-क्ष)(१-क्ष^४)}$$

ह्यांची बेरीज घतल्यानं, $\frac{४+४क्ष+४क्ष^२}{४(१-क्ष)(१-क्ष^४)} = \frac{१+क्ष+क्ष^२}{१-क्ष-क्ष^४+क्ष^५}$

$अ+ब$ आणि $\frac{अ}{२}-\frac{ब}{२}$ ह्यांची वजाबाकी कर

$$अ+ब = \frac{२अ}{२}+\frac{२ब}{२}$$
$$\frac{अ}{२}-\frac{ब}{२}$$
$$\overline{\frac{अ}{२}+\frac{३ब}{२} = बाकी.}$$

६. $\frac{अ}{३}+\frac{ब}{२}-\frac{क}{४}$ आणि $\frac{अ+ब}{४}-\frac{क}{८}$ ह्यांची वजाबाकी कर

$$\frac{\text{अ}}{३}+\frac{\text{ब}}{२}-\frac{\text{क}}{४}=\frac{४\text{अ}}{१२}+\frac{६\text{ब}}{१२}-\frac{२\text{क}}{८}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{४}-\frac{\text{क}}{८}=\frac{३\text{अ}}{१२}+\frac{३\text{ब}}{१२}-\frac{\text{क}}{८}$$

$$\frac{\text{अ}}{१२}+\frac{३\text{ब}}{१२}-\frac{\text{क}}{८}=\frac{\text{अ}+३\text{ब}}{१२}-\frac{\text{क}}{८}$$

७. $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-२}$ आणि $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-३}$ ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी कर.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-२}\times\frac{\text{क्ष}-३}{\text{क्ष}-३}=\frac{\text{क्ष}^२-३\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२-५\text{क्ष}+६}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-३}\times\frac{\text{क्ष}-२}{\text{क्ष}-२}=\frac{\text{क्ष}^२-२\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२-५\text{क्ष}+६}$$

ह्यांचे बेरजेनें, $\frac{२\text{क्ष}^२-५\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२-५\text{क्ष}+६}$, व वजाबाकीनें, $\frac{-\text{क्ष}}{\text{क्ष}^२-५\text{क्ष}+६}$.

८. $\frac{४\text{क्ष}^२-१}{८}$ ह्यास $\frac{२\text{क्ष}+१}{२\text{क्ष}-१}$ ह्यांनीं; आणि $\frac{२\text{अ}^२}{\text{अ}^२-\text{ब}^२}$ ह्यास $\frac{(\text{अ}+\text{ब})^२}{४\text{ब}^२\text{अ}^२}$ ह्यांनीं गुण.

$$\frac{४\text{क्ष}^२-१}{८}\times\frac{२\text{क्ष}+१}{२\text{क्ष}-१}=\frac{(२\text{क्ष}+१)(२\text{क्ष}-१)}{८}\times\frac{२\text{क्ष}+१}{२\text{क्ष}-१}$$

$$\frac{(२\text{क्ष}+१)(२\text{क्ष}+१)}{८}=\frac{४\text{क्ष}^२+४\text{क्ष}+१}{८}$$

$$\frac{२\text{अ}^२}{\text{अ}^२-\text{ब}^२}\times\frac{(\text{अ}+\text{ब})^२}{४\text{अ}^२\text{ब}^२}=\frac{२\text{अ}^२}{(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})}\times\frac{(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})}{२\text{अ}^२\times२\text{ब}^२}$$

$$=\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२\text{ब}^२(\text{अ}-\text{ब})}$$

९. $\frac{\text{अ}+१}{\text{ब}}$ ह्यांस $\frac{१+\frac{१}{\text{अ}}}{\text{ब}}$ ह्यांनीं; आणि $\left(\frac{१}{\text{अ}}+\frac{१}{\text{ब}}\right)$ ह्यांस $\left(\frac{१}{\text{अ}}-\frac{१}{\text{ब}}\right)$ ह्यांनीं भाग.

$$\frac{\text{अ}+१}{\text{ब}}\div\frac{१+\frac{१}{\text{अ}}}{\text{ब}}=\frac{\text{अ}+१}{\text{ब}}\div\frac{{}^*\text{अ}+१}{\text{बअ}}=\frac{\text{अ}+१}{\text{ब}}\times\frac{\text{बअ}}{\text{अ}+१}=\text{अ}.$$

$$\left(\frac{१}{\text{अ}}+\frac{१}{\text{ब}}\right)\div\left(\frac{१}{\text{अ}}-\frac{१}{\text{ब}}\right)=\frac{\text{ब}+\text{अ}}{\text{अब}}\div\frac{\text{ब}-\text{अ}}{\text{अब}}$$

$$=\frac{\text{ब}+\text{अ}}{\text{अब}}\times\frac{\text{अब}}{\text{ब}-\text{अ}}=\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{ब}-\text{अ}}.$$

९ $\frac{\text{क्ष}^२-(\text{अ}+\text{ब})\text{क्ष}+\text{अब}}{\text{क्ष}^२-(\text{अ}-\text{ब})\text{क्ष}-\text{अब}}$ ह्यांस $\frac{\text{क्ष}+\text{ब}}{\text{क्ष}-\text{ब}}$ ह्यांनीं गूण.

$$\frac{\text{क्ष}^२-(\text{अ}+\text{ब})\text{क्ष}+\text{अब}}{\text{क्ष}^२-(\text{अ}-\text{ब})\text{क्ष}-\text{अब}}=\frac{\text{क्ष}^२-\text{बक्ष}-\text{अक्ष}+\text{अब}}{\text{क्ष}^२+\text{बक्ष}-\text{अक्ष}-\text{अब}}$$

$$=\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-\text{ब})-\text{अ}(\text{क्ष}-\text{ब})}{\text{क्ष}(\text{क्ष}+\text{ब})-\text{अ}(\text{क्ष}+\text{ब})}=\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{ब})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{ब})}=\frac{\text{क्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}+\text{ब}},$$

---

* भाज्यपदाच्या दोहीं पदांस अनें गुणून हें पद आलें आहे.

आणि $\frac{क्ष-ब}{क्ष+ब} \times \frac{क्ष+ब}{क्ष-ब} = १$.

११. $\frac{अ^{म}}{(अ+ब)^{न}} + \frac{अ^{म-२}ब^{२}}{(अ+ब)^{न-१}} - \frac{अ^{म-३}ब^{२}}{(अ+ब)^{न-२}}$ ह्यांचें एक अपूर्णपद कर.

येथें $(अ+ब)^{न}$ हा छेदांचा लघुतमसाधारण गुणाकार आहे म्हणून दुसरें आणि तिसरें अपूर्णपद घे, आणि त्यांस हा छेद आण; म्हणजे,

$$\frac{अ^{म-२}ब^{२}}{(अ+ब)^{न-१}} \times \frac{अ+ब}{अ+ब} = \frac{अ^{म-१}ब^{२} + अ^{म-२}ब^{३}}{(अ+ब)^{न}}$$

$$\frac{अ^{म-३}ब^{२}}{(अ+ब)^{न-२}} \times \frac{(अ+ब)^{२}}{(अ+ब)^{२}} = \frac{अ^{म-१}ब^{२} + २अ^{म-२}ब^{३} + अ^{म-३}ब^{४}}{(अ+ब)^{न}}$$

ह्यांची वजाबाकी केल्यानें, $\frac{-अ^{म-२}ब^{३} - अ^{म-३}ब^{४}}{(अ+ब)^{न}}$.

आणि त्यांत पहिलें अपूर्णपद मिळवल्यानें,

$$\frac{अ^{म} - (अ^{म-२} + अ^{म-३}ब)ब^{३}}{(अ+ब)^{न}}.$$

अपूर्णपदांच्या बेरजेचीं उदाहरणें.

१. $\frac{क्ष}{२}$, $\frac{क्ष}{३}$, आणि $\frac{२क्ष}{५}$ ह्यांची बेरीज कर

उत्तर. $\frac{\text{२३क्ष}}{\text{१२}} = \text{क्ष} + \frac{\text{११}}{\text{१२}}\text{क्ष}$.

२. $\frac{\text{२क्ष}}{\text{५}} + \frac{\text{३क्ष}}{\text{२}} + \frac{\text{७क्ष}}{\text{१०}}$; आणि $\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}+\text{क्ष}} + \frac{\text{अ}}{\text{अ}-\text{क्ष}}$.

उत्तर. $\frac{\text{१३क्ष}}{\text{५}}$; आणि $\frac{\text{अ}^{\text{२}}+\text{२अक्ष}-\text{क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{क्ष}^{\text{२}}}$.

३. $\frac{\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{२ब}} + \frac{\text{२अ}}{\text{५}} + \frac{\text{३ब}}{\text{७अ}}$; आणि $\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+\text{३}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{३}}$.

उत्तर. $\frac{\text{१०५अ}^{\text{३}}+\text{२८अ}^{\text{२}}\text{ब}+\text{३०ब}^{\text{२}}}{\text{७०अब}}$; आणि $\frac{\text{२क्ष}^{\text{२}}}{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{९}}$.

४. $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अ}-\text{ब}} + \frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}+\text{ब}}$; आणि $\frac{\text{२क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}^{\text{२}}} + \frac{\text{१}}{\text{क्ष}+\text{१}}$.

उत्तर. $\frac{\text{२}(\text{अ}^{\text{२}}+\text{ब}^{\text{२}})}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}^{\text{२}}}$; आणि $\frac{\text{१}}{\text{१}-\text{क्ष}}$.

५. $\frac{\text{अ}^{\text{२}}+\text{अब}+\text{ब}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{ब}} + \frac{\text{ब}^{\text{२}}}{\text{अ}-\text{ब}}$, आणि $\frac{\text{क्ष}-\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२}}+\text{क्ष}+\text{१}}$
$+ \frac{\text{१}}{\text{क्ष}-\text{१}}$.

उत्तर. $\frac{\text{अ}(\text{अ}^{\text{२}}+\text{ब}^{\text{२}})}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}^{\text{२}}}$; आणि $\frac{\text{२क्ष}^{\text{२}}-\text{क्ष}+\text{२}}{\text{क्ष}^{\text{३}}-\text{१}}$.

६. $\frac{क्ष}{क्ष^{२}-य^{२}}+\frac{य}{क्ष+य}+\frac{१}{क्ष-य}$ आणि $\frac{अ}{१-अ}+\frac{अ}{१+अ}+\frac{१}{१+अ}$.

उत्तर. $\frac{२क्ष+क्षय-य^{२}+य}{क्ष^{२}-य^{२}}$; आणि $\frac{१}{१-अ}$.

अपूर्णपदांच्या वजाबाकीचीं उदाहरणें.

१. $\frac{५अ}{२}$ ह्यांतून $\frac{अ}{३}$ हें; आणि $\frac{३(क्ष+य)}{४}$ ह्यांतून $\frac{क्ष-य}{८}$ हें वजा कर.

उत्तर. $\frac{१३}{६}अ$; आणि $\frac{५क्ष+७य}{८}$.

२. $\frac{५य+२}{७}-\frac{२य+१}{३}$; आणि $\frac{५क्ष-१}{क्ष+१}-\frac{३क्ष+२}{क्ष-१}$.

उत्तर. $\frac{य-१}{२१}$; आणि $\frac{२क्ष^{२}-११क्ष+१}{क्ष^{२}-१}$.

३. $\frac{अ+२ब}{अ-२ब}-\frac{अ-२ब}{अ+२ब}$; आणि $\frac{१}{क्ष-य}-\frac{१}{क्ष+य}$.

उत्तर. $\frac{८अब}{अ^{२}-४ब^{२}}$; आणि $\frac{२य}{क्ष^{२}-य^{२}}$.

४. $\frac{१}{य-ज्ञ} - \frac{१}{य^२-ज्ञ^२}$; आणि $\frac{२क्ष^२-२क्ष+१}{क्ष^२-क्ष}$

$-\frac{क्ष}{क्ष-१}$

उत्तर. $\frac{य+ज्ञ-१}{य^२-ज्ञ^२}$; आणि $१-\frac{१}{क्ष}$.

५. $\frac{क्ष^२-क्ष+१}{क्ष-१} - \frac{२}{क्ष+१}$; आणि $\frac{अ}{(१-अ)^२}$

$+\frac{१}{१-अ} - \frac{अ^२}{(१-अ)^३}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^३-२क्ष+३}{क्ष^२-१}$; आणि $\frac{१-अ-अ^२}{(१-अ)^३}$.

६. $\frac{क्ष^२+य^२}{क्ष^२-य^२} + \frac{क्ष}{क्ष+य} - \frac{य}{क्ष-य}$; आणि

$१-\frac{१}{(क्ष-य)^२} - \frac{१}{क्ष^२-य^२}$.

उत्तर. $\frac{२क्ष}{क्ष+य}$; आणि $१-\frac{२क्ष}{(क्ष+य)(क्ष-य)^२}$.

७. $\frac{१}{२}\cdot\frac{३म+२न}{३म-२न} - \frac{१}{२}\cdot\frac{३म-२न}{३म+२न}$; आणि

$\frac{क्ष^{३न}}{क्ष^{न}-१} + \frac{१}{क्ष^{न}+१} - \frac{क्ष^{२न}}{क्ष^{न}+१} - \frac{१}{क्ष^{न}-१}$.

उत्तर. $\frac{६मन}{९म^{२}-४न^{२}}$; आणि $क्ष^{२न}+२$.

अपूर्णपदांच्या गुणाकाराचीं उदाहरणें.

१. $\frac{३अ}{५}$ ह्यांस $\frac{अ}{४}$ ह्यांनीं; आणि $\frac{२क्ष}{३}$ ह्यांस $\frac{क्षय^{२}}{६}$ ह्यांनीं गूण.

उत्तर. $\frac{३अ^{२}}{२०}$; आणि $\frac{क्ष^{२}य^{२}}{९}$.

२. $\frac{२क्ष}{क्ष-य}\times\frac{क्ष^{२}-य^{२}}{८}$; आणि $\frac{क्ष^{२}-१}{३}\times\frac{६अ}{क्ष+१}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२}+क्षय}{४}$; आणि २अ(क्ष-१).

३. $\frac{अ^{२}-ब^{२}}{अ}\times\frac{१}{अ+ब}\times\frac{अ}{अ-ब}$; आणि

$\frac{१५क्ष-१०}{२क्ष}\times\frac{३क्ष^{२}}{५क्ष-१०}$.

उत्तर. १ ; आणि $\frac{१}{२}$क्ष.

४. $\frac{(क्ष-१)^{२}}{य^{२}} \times \frac{(क्ष+१)य^{२}}{क्ष-१}$; आणि $\left(म+\frac{१}{म}-१\right)$
$\times \left(म+\frac{१}{म}+१\right)$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२}-१}{य}$; आणि $म^{२}+१+\frac{१}{म^{२}}$.

५. $\left(क्ष-\frac{य^{२}}{क्ष}\right)\times\left(\frac{क्ष}{य}+\frac{य}{क्ष}\right)$; आणि $\frac{४क्ष^{२}-१}{९क्ष^{२}-य^{२}}$
$\times\frac{३क्ष+य}{२क्ष-१}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{४}-य^{४}}{क्ष^{२}य}$; आणि $\frac{२क्ष+१}{३क्ष-य}$.

६. $\left\{\frac{अ^{३}क्ष}{अ^{२}-क्ष^{२}}-अ^{२}क्ष-क्ष^{२}\right\}\times\frac{अ+क्ष}{क्ष^{२}}$.

उत्तर. $\frac{क्ष^{२}}{अ-क्ष}$

अपूर्ण पदांच्या भागाकाराचीं उदाहरणें

१. $\frac{५म^{२}}{न}\div\frac{१०}{३न}$; आणि $\frac{३क्ष}{२क्ष-२}\div\frac{२क्ष}{क्ष-१}$

उत्तर. $\frac{३}{२}म^{२}$; आणि $\frac{३}{४}$.

२. $\frac{४अ+२}{३} \div \frac{२अ+१}{५अ}$; आणि $\frac{(क्ष+य)^{२}}{क्ष-य}$

$\div \frac{क्ष+य}{(क्ष-य)^{२}}$.

उत्तर. $\frac{१०अ}{३}$; आणि $क्ष^{२}-य^{२}$.

३. $\left(क्ष+\frac{क्ष}{क्ष-१}\right) \div \left(क्ष-\frac{क्ष}{क्ष-१}\right)$; आणि $\left(क्ष^{२}-\frac{१}{क्ष^{२}}\right)$

$\div \left(क्ष^{२}+\frac{१}{क्ष}\right)$.

उत्तर. $\frac{क्ष}{क्ष-२}$; आणि $क्ष^{२}-\frac{१}{क्ष}$.

४. $\frac{क्ष^{३}-३क्ष^{२}अ+३क्षअ^{२}-अ^{३}}{क्ष+अ} \div \frac{क्ष-अ}{क्ष+अ}$.

उत्तर. $(क्ष-अ)^{२}$.

५. $\frac{क्ष^{३}-य^{३}}{अ^{३}+ब^{३}} \div \frac{क्ष-य}{अ^{२}-अब+ब^{२}}$

उत्तर. $\frac{क्ष^{३}+क्ष^{२}य+क्षय^{२}+य^{३}}{अ+ब}$.

६. $\left(क्ष^{२}+२+\frac{१}{क्ष^{२}}\right) \div \frac{क्ष+\frac{१}{क्ष}}{अ}$.

उत्तर. $\frac{अक्ष^{२}+अ}{क्ष}$.

पुढील समीकरणांत क्षची किंमत काढ.

१. $३क्ष+४=\frac{५क्ष+४}{२}+८$. दोहोंनीं गूण.

$६क्ष+८=५क्ष+४+१६$. स्थलांतर कर

$६क्ष-५क्ष=४+१६-८$.

$\therefore क्ष=१२$

२. $\frac{३०+क्ष}{क्ष}-५=\frac{६}{क्ष}$. क्षनीं गूण.

$३०+क्ष-५क्ष=६$. स्थलांतर कर.

$क्ष-५क्ष=६-३$

$-४क्ष=-२४$. -४ यांनीं भाग.

$\therefore क्ष=६$.

३. $\frac{क्ष}{२}-\frac{{}^{*}५क्ष+४}{३}=७-\frac{{}^{*}८क्ष-२}{३}$. छेदांचा ल० सा० गु० ६ यानें गूण.

$३क्ष-१०क्ष-८=४२-१६क्ष+४$. स्थलांतर कर.

$३क्ष-१०क्ष+१६क्ष=४२+४+८$.

---

* या अपूर्णपदांच्या पूर्वी ऋण चिन्ह आहे म्हणून त्यांच्या अंशांचें चिन्ह बदललें पाहिजे; कारण तें चिन्ह असें दर्शवितें कीं, त्यांचे पाठीमागें जें पद आहे त्यांतून प्रत्येक पद वजा करावयाचें आहे.

$$९ क्ष = ५४$$

$$\therefore क्ष = ६.$$

४. $$\frac{२}{क्ष+१}+\frac{५}{२क्ष+२}+\frac{६क्ष-६}{क्ष^२-१}=२\frac{५}{८}$$

येथें $\frac{६क्ष-६}{क्ष^२-१}=\frac{६(क्ष-१)}{(क्ष-१)(क्ष+१)}$, यास्तव वरील समीकरण असें होतें.

$$\frac{२}{क्ष+१}+\frac{५}{२(क्ष+१)}+\frac{६}{क्ष+१}=\frac{२१}{८}$$

$\because$ ८(क्ष+१) यांनीं गुणून, $१६ + २० + ४८ = २१(क्ष+१).$

$$८४ = २१(क्ष+१).$$

$$४ = क्ष+१.$$

$$\therefore ३ = क्ष.$$

५. $$\frac{अक्ष+ब}{क}+\frac{अक्ष+ब}{कक्ष+ब}=\frac{२अक्ष+ड}{२क}+\frac{ब}{क}$$

२क यांनीं गूण.

$$२अक्ष+२ब+\frac{२अकक्ष+२कब}{कक्ष+ब}=२अक्ष+ड+२ब.$$

$\because$ २अक्ष आणि २ब हे समीकरणाचे प्रत्येक बा-जूस असून त्यांचीं चिन्हें सरूप आहेत, $\therefore$ ते गाळतां ये-

तील ; आणि ∴ वरील समीकरण असें होतें.

$$\frac{२अकक्ष+२बक}{कक्ष+ब}=ड.$$ (कक्ष+ब) ह्यांनीं गूण.

$$२अकक्ष+२कब=कडक्ष+डब.$$ स्थलांतरकर.

$$२अकक्ष-कडक्ष=डब-२कब.$$

$$(२अक-डक)क्ष=डब-२कब.$$

$$\therefore क्ष=\frac{डब-२कब}{२अक-डक}.$$

६. $$\frac{७क्ष+\frac{१३}{२}}{१०}+\frac{११क्ष-\frac{क्ष-\frac{३}{२}}{२}}{१२}=\frac{३क्ष+१}{५}+\frac{४३क्ष-\frac{३-८क्ष}{२}}{२२}$$

येथें $$\frac{७क्ष+\frac{१३}{२}}{१०}=\frac{१४क्ष+१३}{२०}.$$

$$\frac{११क्ष-\frac{क्ष-\frac{३}{२}}{२}}{१२}=\frac{११क्ष-\frac{२क्ष-३}{४}}{१२}=\frac{४४क्ष-२क्ष+३}{४८}$$

$$=\frac{४२क्ष+३}{४८}=\frac{१४क्ष+१}{१६}.$$

$$\frac{४३क्ष-\frac{३-८क्ष}{२}}{२२}=\frac{८६क्ष-३+८क्ष}{४४}=\frac{९४क्ष-३}{४४}.$$

म्हणून वरील समीकरण असें होतें,

$$\frac{\text{१४क्ष}+\text{१३}}{\text{२०}}+\frac{\text{१४क्ष}+\text{१}}{\text{१६}}=\frac{\text{३क्ष}+\text{१}}{\text{५}}+\frac{\text{९४क्ष}-\text{३}}{\text{४४}}.$$

छेदांचा लघु॰ सा॰ गु॰ ८८०, त्यानें गूण.

$$\text{६१६क्ष}+\text{५७२}+\text{७७०क्ष}+\text{५५}=\text{५२८क्ष}+\text{१७६}+\text{१८८०क्ष}-\text{६०}$$

$$\text{१३८६क्ष}-\text{२४०८क्ष}=\text{११६}-\text{६२७}$$

$$-\text{१०२२क्ष}=-\text{५११}$$

$$\therefore \text{क्ष}=\frac{-\text{५११}}{-\text{१०२२}}=\frac{\text{१}}{\text{२}}.$$

प्रश्न.

१. १०० ह्या संख्येचे असे दोन भाग कर, कीं जर एके भागास १५ ह्यांनीं भागिलें आणि दुसऱ्यास ५ ह्यांनीं भागिलें तर त्यांच्या भागाकारांची बेरीज १० होईल.

एक भाग दाखवायास क्ष ये, तर १००−क्ष हा दुसरा भाग होईल.

आतां $\frac{\text{क्ष}}{\text{१५}}$ आणि $\frac{\text{१००}-\text{क्ष}}{\text{५}}$ हे दोन भागाकार आहेत.

म्हणून प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{\text{क्ष}}{\text{१५}}+\frac{\text{१००}-\text{क्ष}}{\text{५}}=\text{१०};$

$$\text{क्ष}+\text{३००}-\text{३क्ष}=\text{१५०}$$

$$-\text{२क्ष}=\text{१५०}-\text{३००}=-\text{१५०}$$

$\therefore$ क्ष = ७५ = एकभाग.

आणि $\therefore$ १०० − क्ष = १०० − ७५ = २५ = दुसराभाग.

अथवा प्रकारांतरानें, दोन भाग दाखविण्यास क्ष आणि य हीं दोन अव्यक्त असें घे.

तर क्ष + य = १०० ..... (१)

आणि $\frac{क्ष}{१५} + \frac{य}{५}$ = १० ..... (२) १५ ह्यांनीं गूण.

क्ष + ३य = १५०
(१) क्ष + य = १००
} वजाबाकी कर.

२ य = ५० $\therefore$ य = २५ = एकभाग,

(१) क्ष = १०० − य = १०० − २५ = ७५ = दुसराभाग.

२. एक मनुष्य आपल्या देशांतून निघून दुसरे देशांत गेला; त्याचे पाशीं एक मोहर होती आणि त्यास अशी इच्छा झाली कीं, त्या नव्या देशांत जीं दोन प्रकारचीं नाणीं आहेत, तीं पंचवीस घेऊन आपली मोहर देऊन टाकावी, आणि तो चौकशी करून पाहातो तों एका प्रकारचें नाणें घेतलें तर एके मोहरेस ३० येतें आणि दुसऱ्या प्रकारचें घेतलें तर १५ येतें; तर एक एक प्रकारचें नाणें त्यानें किती किती घ्यावें?

एक प्रकारचें नाणें दाखवायास क्ष घे,

आणि दुसरे प्रकारचें .... य ... ;

तर क्ष+य = २५ ...... (१)

नाणी : नाणी :: *रु : रु.

३० : क्ष :: १५ : $\frac{क्ष}{२}$ = क्ष नाण्यांची किंमत.

१५ : य :: १५ : य = य ....

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{क्ष}{२}$ + य = १५ रुपये ... (२)

क्ष + २ य = ३० } वजाबाकी कर

(१) क्ष + य = २५

य = ५ = दुसरे प्रकारचें नाणें.

(१) क्ष = २५ − य = २५ − ५ = २० = पहि॰ ....

३. एक गृहस्थ जितका पैसा खर्च करीत असे त्याना $\frac{१}{३}$ मागें टाकी. पुढें त्याचा खर्च पहिल्याप्रमाणेंच राहून मिळकत मात्र कमी झाली म्हणून पहिल्याच्या अर्धा इतका पैसा तो आतां मागें टाकूं लागला; तर कमी झालेली मिळकत आणि पहिली मिळकत ह्यांतील अंतर पहिले मिळकतीचा कितवा भाग होतें?

* १ मोहोर = १५ रुपये

तो जो पैसा मागें टाकितो = २क्ष रुपये घे,

तर .... खर्च करी = ८क्ष ......,

∴ २क्ष + ८क्ष = १०क्ष = त्याची पहिली मिळकत.

पुनः ८क्ष हे तो खर्चीच, आणि क्ष हे मागें टाकीच;

∴ ८क्ष + क्ष = ९क्ष = कमी झालेली मिळकत.

∴ १०क्ष − ९क्ष = क्ष = पहिली आणि कमी झालेली मिळकत ह्यांतील अंतर.

म्हणून $\frac{\text{क्ष}}{\text{१०क्ष}} = \frac{\text{१}}{\text{१०}}$ = उत्तर.

४. अ कितीएक मैल कांहीं वेळांत कांहीं चालीनें चालून गेला; जर तो $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ मैल दर तासास जाजती चालता तर त्यास, पहिल्या चालीनें जितका विवक्षित ठिकाणीं जावयास वेळ लागला, त्याचा $\frac{\text{४}}{\text{५}}$ वेळ लागता; परंतु $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ मैल कमी चालता तर त्यास विवक्षित ठिकाणीं जावयास पूर्व वेळेपेक्षां २$\frac{\text{१}}{\text{२}}$ तास जाजती वेळ लागता; तर त्यास किती लांब जावयाचें होतें व तो कोणत्या प्रमाणानें चालला?

त्याची दर तासाची चाल = क्ष मैल घे,

आणि एकंदर अंतर = य ......;

तर $\frac{\text{य}}{\text{क्ष}}$ इतके तास त्यास जावयास लागलें.

आतां $क्ष + \frac{१}{२} = \frac{२क्ष+१}{२}$ ही वाढलेली चाल;

$\therefore य \div \frac{२क्ष+१}{२}$ किंवा $\frac{२य}{२क्ष+१}$ इतके तास जर तो $\frac{१}{२}$ मैल जाजती चालता तर रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{२य}{२क्ष+१} = \frac{४}{५} \cdot \frac{य}{क्ष} \cdots (१)$

पुनः $क्ष - \frac{१}{२}$ किंवा $\frac{२क्ष-१}{२}$ ही कमी झालेली चाल,

$\therefore य \div \frac{२क्ष-१}{२}$ किंवा $\frac{२य}{२क्ष-१}$ इतके तास जर तो $\frac{१}{२}$ मैल कमी चालता तर त्यास रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें, $\frac{२य}{२क्ष-१} = \frac{य}{क्ष} + २\frac{१}{२} \cdots (२)$

(१) त्यास २य त्यानें भागून, $\frac{१}{२क्ष+१} = \frac{२}{५क्ष}$;

$\therefore ५क्ष = ४क्ष + २,$

$५क्ष - ४क्ष = २; \therefore क्ष = २.$

ही क्षची किंमत (२) ह्यांत मांड.

$\frac{२य}{४-१} = \frac{य}{२} + \frac{५}{२};$

$\frac{२य}{३} = \frac{य}{२} + \frac{५}{२}$ ६ ह्यांनीं गूण.

$४य = ३य + १५;$

$४य - ३य = १५ \therefore य = १५.$

उत्तर . अंतर=१५मैल; आणि दरतासाची चाल=३मैल.

५. एक ससा आपल्या ५०उडया कुत्र्यापुढें आहे, व जितक्या वेळांत कुत्रा ३उड्या मारितो तितक्या वेळांत ससा ४उडया मारितो. परंतु कुत्र्याच्या २उडया सशाच्या ३उड्यांबरोबर आहेत; तर सशास धरावयास कुत्र्यास किती उडया माराव्या लागतील ?

ज्या उडया कुत्र्यास माराव्या लागतील त्या=क्ष घे.

$२ : क्ष :: ३ : \frac{३क्ष}{२}$ = निघाल्यापासून कुत्र्याच्या हातीं लागेपर्यंत ज्या सशाच्या उडया त्या.

$३ : क्ष :: ४ : \frac{४क्ष}{३}$ = कुत्रा निघाल्यापासून सशाच्या ज्या उडया त्या.

$$\therefore \frac{३क्ष}{२} - ५० = \frac{४क्ष}{३};$$

$$९क्ष - ३०० = ८क्ष.$$

$$क्ष = ३००$$ हें उत्तर.

६. एक मनुष्य जुवा खेळावयास बसला असतां खेळतां खेळतां आपल्या पैशाचा $\frac{१}{४}$ हरला, आणि मग त्यानें तीन रुपये जिंकिले; नंतर त्याजवळ जें द्रव्य जमलें त्याचा $\frac{१}{३}$ तो हरला; आणि पुनः त्यानें २रुपये

जिंकिले; आणि शेवटीं त्याजवळ जो पैसा झाला त्या-चा ½ पुन तो हरला आणि पहातो तों जवळ १२ रुपये राहिले. तर तो खेळावयास बसला तेव्हां त्याजवळ किती रुपये होते?

त्याजवळ मुळीं जें द्रव्य होतें तें = क्ष रुपये घे.

तर $\frac{क्ष}{४}$ त्यानें गमावला;

$क्ष - \frac{क्ष}{४} = \frac{३क्ष}{४}$ इतकें द्रव्य त्याजवळ बाकी राहिलें;

$\therefore \frac{३क्ष}{४} + ३ = \frac{३क्ष+१२}{४}$ ही त्याची ३ रुपये जिंकल्यावरची जमा;

$\frac{क्ष+४}{४}$ इतकें द्रव्य त्यानें दुसरे वेळेस गमाविलें,

$\therefore \frac{३क्ष+१२}{४} - \frac{क्ष+४}{४} = \frac{२क्ष+८}{४} = \frac{क्ष+४}{२}$ ही त्याची बाकी,

$\frac{क्ष+४}{२} + २ = \frac{क्ष+८}{२}$ ही त्याची २ रु॰ जिंकिल्यावरची जमा.

$\therefore \frac{क्ष+८}{१४}$ इतकें द्रव्य त्यानें तिसरे वेळेस गमाविलें,

$\frac{क्ष+८}{२} - \frac{क्ष+८}{१४} = \frac{७क्ष+५६}{१४} - \frac{क्ष+८}{१४} = \frac{६क्ष+४८}{१४}$ ही त्याची शेवटची बाकी,

$$\therefore \text{प्रश्नाप्रमाणें, } \frac{\text{६क्ष}+\text{८}}{\text{४}} = \text{१२},$$

$$\frac{\text{क्ष}+\text{८}}{\text{१४}} = \text{२};$$

$$\text{क्ष}+\text{८} = \text{२८}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \text{२० रुपये हें उत्तर.}$$

७. पायदळलोकांची एक टोळी घोडेस्वारांपुढें आपल्या ११६५ पावलांवर आहे; आतां घोड्यांच्या तीन पावलांचें अंतर पायदळांच्या चार पावलांचे अंतराबरोबर आहे, आणि जितक्या वेळांत पायदळ ५ पावलें जातात तितक्या वेळांत घोडे ४ पावलें जातात, तर पायदळास गांठीत तोंपर्यंत घोड्यांस किती पावलें चाललीं पाहिजेत?

घोड्यांस जितकीं पावलें चाललीं पाहिजेत तीं = क्ष धर,

तर $\overset{\text{घो॰पा॰}}{\text{३}} : \overset{\text{घो॰पा॰}}{\text{क्ष}} :: \overset{\text{पा॰पा॰}}{\text{४}} : \overset{\text{पा॰पा॰}}{\frac{\text{४क्ष}}{\text{३}}}$ = निघाल्यापासून घोडेस्वारांची गांठ पडे तोंपर्यंत जीं पायदळांचीं पावलें तीं.

$\overset{\text{घो॰पा॰}}{\text{४}} : \overset{\text{घो॰पा॰}}{\text{क्ष}} :: \overset{\text{पा॰पा॰}}{\text{५}} : \overset{\text{पा॰पा॰}}{\frac{\text{५क्ष}}{\text{४}}}$ = घोडेस्वार निघाल्यापासून घोडेस्वार गांठीत तोंपर्यंत जीं पायदळाचीं पावलें तीं.

$$\therefore \frac{४क्ष}{३} - ११६५ = \frac{५क्ष}{४} ;$$

$$१६क्ष - १३९८० = १५क्ष$$

$$१६क्ष - १५क्ष = १३९८०$$

$$\therefore क्ष = १३९८०$$

एका नावाड्यास कांहीं वेळ खेपा केल्यावरून असें कळून आलें कीं, भरतीच्या साहाय्यानें अ पासून ब पावेतों (ज्यांचे मध्यें १८ मैल अंतर आहे) १$\frac{१}{२}$ तासांत होडी नेतां येते ; आणि कांठाशीं मध्यापेक्षां पाण्याचा जोर $\frac{२}{५}$ कमी आहे म्हणून ब पासून अ कडे परत येतांना तो कांठाकांठानें जरी येतो तरी त्यास २$\frac{१}{४}$ तास लागतात. त्यावरून भरतीच्या वेळेस मध्यभागीं जेथें पाण्याचा जोर अत्यंत तेथें एके तासांत पाणी किती लांब जातें?

भरती असतां दर तासांत मध्यें पाणी जे मैल जातें ते = क्ष घे,

तर .... कांठाशीं .... = $\frac{३क्ष}{५}$.

आणि $\frac{१८}{१+\frac{१}{२}}$ = १२ मैल = भरतीच्या साहाय्यानें तो मध्यभागीं होडी दर तासांत जे मैल नेतो ते ;

∴ १२ − क्ष = भरती नसतां एके तासांत होडी जे मैल नेतो ते.

पुनः $\frac{१८}{२\frac{१}{४}}$ = ८=आंगावरच्या भरतींत कांगकांठानें तो होडी दरतासांत जे मैल आणतो ते;

$\therefore$ ८+ $\frac{३क्ष}{५}$ = भरती नसतांतादरतासांत होडी जे मैल आणतो ते.

म्हणून $१२-क्ष = ८+\frac{३क्ष}{५}$;

$६० - ५क्ष = ४० + ३क्ष$;

$८क्ष = २०$

$\therefore$ $क्ष = २\frac{१}{२}$ = भरती असतां मध्यभागीं अत्यंत जोराचे ठिकाणीं पाणी दरतासांत जे मैल वाहतें ते.

समीकरणें.

१. $\frac{५क्ष}{६} + \frac{२}{३} = क्ष + \frac{१}{३}$. उत्तर. क्ष=२.

२. $\frac{३क्ष-४}{२} = \frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{४} + १$. उत्तर. क्ष=४.

३. $५क्ष - \frac{६क्ष+३}{११} = \frac{७क्ष+१५}{२} - ३$. उत्तर. क्ष=५.

४. $\frac{४}{क्ष} + २ = \frac{२४}{क्ष} - \frac{१}{२}$. उत्तर. क्ष=८.

५. $\frac{क्ष}{८} - १ + \frac{क्ष}{१२} - \frac{क्ष+५}{४} = -\frac{११}{४}$.

उत्तर. $क्ष=१२$.

६. $\frac{क्ष+अ}{ब}-\frac{क्ष}{अ}=१$. उत्तर. $क्ष=-अ$.

७. $\frac{ब}{अक्ष}-अ^{२}=ब^{२}-\frac{अ}{बक्ष}$. उत्तर. $क्ष=\frac{१}{अब}$

८. $\frac{अ(ब^{२}+क्ष^{२})}{बक्ष}=अक+\frac{अ}{ब}क्ष$.

उत्तर. $क्ष=\frac{ब}{क}$

प्रश्न.

१. दाहा वर्षांमागें एका मुलाचें वय त्याच्या बापाच्या वयाचा दशमांश होतें, परंतु तें आतां चतुर्थांश आहे. तर त्या दोघांचीं वयें काय आहेत?

उत्तर १५ आणि ६०.

२. अशी एक संख्या काढ, कीं जिच्या तिपटींतून ८ वजा करून जी बाकी राहील तिचें अर्ध केल्यास तें, त्याच संख्येंतून दोन वजा करून जी बाकी राहील तीबरोबर होईल. उत्तर. ४.

३. असा एक अपूर्णांक काढ, कीं त्याच्या अंशांत एक मिळविला असतां त्याची किंमत $\frac{१}{२}$ होईल; आणि

छेदांतून एक वजा केला असतां त्याची किंमत १/४ होईल.

उत्तर. १/६.

४. अ, ब, आणि क ह्या तिघांमध्यें १३२ रुपये वांटून द्यावयाचे आहेत, ते असे कीं, बस अच्या द्रव्याचे ४/५ येतील, आणि कस अच्या आणि बच्या द्रव्याचे ५/६ येतील; तर प्रत्येकाचा वांटा काय होईल?

उत्तर. अ ४० रु०; ब ३२ रु०; आणि क ६० रु०

५. अजवळ कांहीं मोहोरा होत्या, आणि त्यास वाटेनें त्याचे ब आणि क असे दोन सावकार भेटले, तेव्हां त्यानें आपल्या द्रव्याचे ३/१० बस दिले व बाकीच्या द्रव्याचे ६/७ कस दिले; आणि पाहातो तों ११ मोहोरा बाकी राहिल्या; तर त्याजवळ प्रथमतः द्रव्य किती होतें?

उत्तर. ११० मोहोरा.

६. एका मनुष्यानें आपल्या द्रव्याच्या १/१२ चे घोडे घेतले, १/३ चे बैल घेतले, आणि बाकीच्या द्रव्याच्या ३/१० चीं मेंढरें घेतलीं; आणि पाहातो तों जवळ ९८ रुपये राहिले; तर त्याजवळ प्रथमतः द्रव्य किती होतें?

उत्तर २४० रुपये.

प्रकरण ३.

घातकरणें.

(११) कोणत्याही पदास विवक्षित वेळां त्याच पदानें गुणणें ह्यास त्या पदाचा घातकरणें असें म्हणतात.

जसें, $अ \times अ = अ^{१} \times अ^{१} = अ^{१+१} = अ^{२} =$ अचा दुसरा घात अथवा वर्ग.

$अ \times अ \times अ = अ^{१} \times अ^{१} \times अ^{१} = अ^{१+१+१} = अ^{३} =$ अचा तिसरा घात अथवा घन.

$अ \times अ \times अ \times अ \cdots\cdots$ नसंख्येपर्यंत $=$ $अ^{१+१+१+१\cdots\text{नपर्यंत}} = अ^{न}$.

पुनः, $अ^{२} \times अ^{२} \times अ^{२} = अ^{२+२+२} = अ^{२\times३} = (अ^{२})^{३} = अ^{६}$.

$अ^{न} \times अ^{न} \times अ^{न} \cdots$ मसंख्येपर्यंत $=$ $अ^{न+न+न\cdots\text{मपर्यंत}} = अ^{न\times म} = अ^{नम}$.

ह्यावरून कोणत्याही पदाचा कोणताही घात करण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाचे घातप्रकाशकास त्या पदाचा जो घात करायाचा आहे, त्या अंकानें गुणावें, गुणाकार त्या पदाचा तो विवक्षित

घात येतो.

$$\sqrt{अ}\times\sqrt{अ}=अ^{\frac{1}{2}}\times अ^{\frac{1}{2}}=अ^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=अ^{1}=अ,$$

$$\sqrt[3]{अ}\times\sqrt[3]{अ}=अ^{\frac{1}{3}}\times अ^{\frac{1}{3}}=अ^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=अ^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{अ^{2}},$$

$$\sqrt[4]{अ}\times\sqrt[4]{अ}\times\sqrt[4]{अ}=अ^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=अ^{\frac{1+1+1}{4}}=अ^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{अ^{3}}.$$

$$(-अ)^{2}=-अ\times-अ=अ^{2},$$

$$(-अ)^{3}=-अ\times-अ\times-अ=-अ^{3},$$

$$(-अ)^{4}=-अ\times-अ\times-अ\times-अ=अ^{4};$$

इ० इ० इ०

ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं ऋण पदांचा समघात धन येतो; आणि ऋण पदांचा विषम घात ऋण येतो.

$$(अ+ब)^{2}=(अ+ब)\times(अ+ब)=अ^{2}+2अब+ब^{2},$$

$$(अ-ब)^{2}=(अ-ब)\times(अ-ब)=अ^{2}-2अब+ब^{2},$$

$$(अ+ब)^{3}=(अ+ब)\times(अ+ब)\times(अ+ब)=$$

$$अ^{3}+3अ^{2}ब+3अब^{2}+ब^{3}=अ^{3}+ब^{3}+3अब(अ+ब),$$

$$(अ-ब)^{3}=(अ-ब)\times(अ-ब)\times(अ-ब)=$$

$$अ^{3}-3अ^{2}ब+3अब^{2}-ब^{3}=अ^{3}-ब^{3}-3अब(अ-ब).$$

ह्या शेवटल्या दोन सारण्यावरून असा नियम बांधतां येतो, कीं कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचा

घन, त्यांच्या घनांची बेरीज व त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांच्या बेरजेनें गुणून जो गुणाकार येतो तो, ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे; व कोणत्या दोन पदांच्या वजाबाकीचा घन, त्यांच्या घनांच्या वजाबाकींतून, त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांचे वजाबाकीनें गुणून जो गुणाकार येतो, तो वजा करून जी बाकी राहाते, त्या बाकीबरोबर आहे.

$$(अ+ब+क)^२=\{(अ+ब)+क\}^२=(अ+ब)^२+२क(अ+ब)+क^२$$
$$=अ^२+२अब+ब^२+२अक+२बक+क^२.$$

$$(अ+ब+क+ड)^२=\{(अ+ब)+(क+ड)\}^२=$$
$$(अ+ब)^२+२(अ+ब)(क+ड)+(क+ड)^२.$$

$$(अ+ब-क+ड)^२=\{(अ+ब)-(क-ड)\}^२=$$
$$(अ+ब)^२-२(अ+ब)(क-ड)+(क-ड)^२.$$

उदाहरणें.

१. असें दाखीव कीं, $(क्ष-२अ)^२=क्ष^२-४अक्ष+४अ^२$.

२. .... $\left(क्ष+\frac{१}{क्ष}\right)^२=क्ष^२+२+\frac{१}{क्ष^२}$.

३. ..... $(क्ष+\frac{प}{२})^{२} = क्ष^{२} + पक्ष + \frac{प^{२}}{४}$.

४. ..... $(२क्ष-३य)^{२} = ४क्ष^{२} - १२क्षय + ९य^{२}$.

५. ..... $(२क्ष-१)^{२} = ४क्ष^{२} - ४क्ष + १$.

६. ..... $(अ+ब)^{४} = अ^{४} + ४अ^{३}ब + ६अ^{२}ब^{२} + ४अब^{३} + ब^{४}$.

७. ..... $(अ-क्ष)^{४} = अ^{४} - ४अ^{३}क्ष + ६अ^{२}क्ष^{२} - ४अक्ष^{३} + क्ष^{४}$.

८. ..... $(क्ष+य)^{५} = क्ष^{५} + ५क्ष^{४}य + १०क्ष^{३}य^{२} + १०क्ष^{२}य^{३}$
$+ ५क्षय^{४} + य^{५}$.

९. ..... $(स-ज्ञ)^{५} = स^{५} - ५स^{४}ज्ञ + १०स^{३}ज्ञ^{२} - १०स^{२}ज्ञ^{३}$
$+ ५सज्ञ^{४} - ज्ञ^{५}$.

१०. ..... $(क्ष^{\frac{१}{२}}+य^{\frac{१}{२}})^{२} = क्ष + २क्ष^{\frac{१}{२}}य^{\frac{१}{२}} + य = क्ष + २\sqrt{क्षय} + य$

११. ..... $(क्ष-\sqrt{य})^{२} = क्ष^{२} - २क्ष\sqrt{य} + य$.

१२. ..... $(क्ष^{२}य+\sqrt{य})^{२} = क्ष^{४}य^{२} + २क्ष^{२}य^{\frac{३}{२}} + य$.

१३. ..... $(क्ष^{\frac{१}{३}}-य^{\frac{१}{३}})^{३} = क्ष - ३क्ष^{\frac{२}{३}}य^{\frac{१}{३}} + ३क्ष^{\frac{१}{३}}य^{\frac{२}{३}} - य$.

१४. ..... $(क्ष+१)^{४} = क्ष^{४} + ४क्ष^{३} + ६क्ष^{२} + ४क्ष + १$.

१५. ..... $\{(अ+ब)^{\frac{१}{३}}-(अ-ब)^{\frac{१}{३}}\}^{३} = २ब - ३(अ+ब)^{\frac{१}{३}}$
$\times (अ-ब)^{\frac{१}{३}}\{(अ+ब)^{\frac{१}{३}}-(अ-ब)^{\frac{१}{३}}\}$.

मूळ काढणें.

(१२) कोणत्याही एकाद्या पदास ज्या दुसऱ्या पदानें विवक्षित वेळां भागून भाग बरोबर तुटतो त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाचें मूळ म्हणतात.

अचा वर्ग $अ^{२}$ आहे म्हणून $अ^{२}$चें वर्गमूळ अ आहे.

अचा घन $अ^{३}$ आहे म्हणून $अ^{३}$चें घनमूळ अ आहे.

अचें वर्गमूळ $\sqrt{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{२}}$ आहे; $\because \sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ$, आणि $अ^{\frac{१}{२}} \times अ^{\frac{१}{२}} = अ^{१} = अ$.

अचें घनमूळ $\sqrt[३]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{३}}$ आहे.

अचें नमूळ $\sqrt[न]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{न}}$ आहे.

$अ^{२}$चें घनमूळ $\sqrt[३]{अ^{२}}$ अथवा $अ^{\frac{२}{३}}$ आहे.

$अ^{न}$चें ममूळ $\sqrt[म]{अ^{न}}$ अथवा $अ^{\frac{न}{म}}$ आहे.

ह्यावरून कोणत्याही एकाकी पदाचें मूळ काढण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाच्या घातप्रकाशकास जितकें मूळ काढावयाचें आहे त्या अंकानें भागावें, भागाकार विवक्षित मूळ येतें.

$\because +अ \times +अ = +अ^{२}$, आणि $-अ \times -अ = +अ^{२}$,

$\therefore \sqrt{अ^{२}} = +अ$, किंवा $-अ$.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धन पदाचें वर्गमूळ धन किंवा ऋण आहे. परंतु जर तें धनपद ऋण पदाचा वर्ग आहे असें माहीत आहे तर त्याचें वर्गमूळ ऋण धरावें.

$\because +अ \times +अ \times +अ = +अ^{३}$, आणि $-अ \times -अ \times -अ = -अ^{३}$,

$\therefore \sqrt[३]{अ^{३}} = +अ$, आणि $\sqrt[३]{-अ^{३}} = -अ$.

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धनपदाचें घनमूळ धन आणि ऋणपदाचें घनमूळ ऋण आहे.

$\because$ असें कोणतेंही पद नाहीं कीं ज्यास ज्यानें गुणिलें असतां गुणाकार $-अ^{२}$ येईल, $\therefore -अ^{२}$चें वर्गमूळ निघावयाचें नाहीं.

$अ^{२} + २अब + ब^{२}$ हा $(अ+ब)$चा वर्ग आहे म्हणून ह्याचे योगानें द्विपदाचें वर्गमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल; कांकीं, $अ^{२} + २अब + ब^{२} = अ^{२} + (२अ + ब)ब$; आणि $\because अ^{२}$चें वर्गमूळ अ आहे, व हें मूळांतील पहिलें पद आहे, म्हणून आतां

आपणास असा कांहीं भाजक काढिला पाहिजे कीं, ज्यानें भागिलें असतां + ब हा भागाकार येईल, आणि हें उघड आहे कीं तो भाजक २अ + ब, म्हणजे मूळांतील पहिल्या पदाची दुप्पट व दुसरें पद ह्यांची बेरीज, आहे.

ह्यावरून अ^2+२अब+ब^2 ह्याचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे, तर पहिल्यानें अ^{2}चें मूळ अ हें घ्यावें, आणि तें मूळस्थानीं लिहावें. आणि त्याचा वर्ग अ^2+२अब+ब^2 ह्यांतून वजा करावा; मग भाजकाकरितां अ ह्या मूळाची दुप्पट करावी, आणि हिनें बाकी राहिलेल्या पदास भागावें म्हणजे (२अ+ब) व ह्यास २अनीं भागावें, आणि जो भागाकार येईल तो मूळस्थानीं लिहावा, व भाजकास त्याच्या चिन्हासहित जोडावा; मग २अ+ब ह्यास दुसरें पद म्हणजे ब ह्यानें गुणून तो गुणाकार वजा करावा. हीरीति खालच्या उदाहरणांत करून दाखवितों.

अ^2+२अब+ब^2(अ+ब

२अ+ब) अ^2

२अब+ब^2

२अब+ब^2

हा नियम १२२५ ह्या संख्येचें वर्गमूळ काढण्यास लावून पाहूं.

```
                 १२२५ (३०+५ अथवा ३५.
                  ९००*
६०+५, अथवा ६५ ) ३२५
                  ३२५
```

$अ^2+२अब+२अक+२बक+ब^2+क^2$ ह्याचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे असें मान.

$अ^2+२अब+२अक+२बक+ब^2+क^2$ (अ+ब+क.

```
        अ²
२अ+ब)  २अब           +ब²
       २अब           +ब²
२अ+२ब+क)   २अक+२बक   +क²
           २अक+२बक   +क²
```

ह्या उदाहरणांत अ+ब हीं दोन पदें निघाल्यानंतर बाकी राहिलेलें पद क हें काढण्याकरितां मूळस्थानच्या पहिल्या दोन पदांची नव्या भाजकाकरितां दुप्पट केली आहे.

(अ+ब) हें $अ^3+३अ^2ब+३अब^2+ब^3$ ह्याचें

---

* व्यवहारांतील पूर्णांकांचेरीतींत ही दोन्ही शून्यें गाळतां येतील.

घनमूळ आहे, म्हणून ह्याचे योगानें घनमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल. पहिलें पद $अ^3$ ह्याचें घनमूळ अ आहे, हें मूळांतील पहिलें पद आहे. सगळ्या पदांतून ह्याचा घन वजा करावा, मग भाजकाकरितां $३अ^2$ घ्यावें, आणि त्यांनीं बाकींतील पहिलें पद भागिलें असतां जो भागाकार ब येईल तो मूळांतील दुसरें पद होईल; मग त्या भाजकांत $३अब+ब^2$ मिळवून त्या बेरजेस बनें गुणिलें म्हणजे $३अ^2ब+३अब^2+ब^3$ हा गुणाकार येतो, तो बाकीबरोबर आहे.

ही रीति खालच्या उदाहरणांत करून दाखवितों.

$$अ^3+३अ^2ब+३अब^2+ब^3 (अ+ब.$$

$$अ^3$$

$$३अ^2+३अब+ब^2) \quad ३अ^2ब+३अब^2+ब^3$$

$$३अ^2ब+३अब^2+ब^3$$

हा नियम आपण ९११२५ ह्या संख्येचें घनमूळ काढण्यास लावून पाहूं.

$$९११२५ (\overset{अ}{४०}+\overset{ब}{५}, \text{ अथवा } ४५.$$

$$अ^3 = ६४०००$$

$$३अ^2 = ३\times ४०^2 = ४८००) \; २७१२५.$$

$३ अ^२ ब = ३ \times ४०^२ \times ५ =$ २४०००

$३ अ ब^२ = ३ \times ४० \times ५^२ =$ ३०००

$ब^३ = ५^३ =$ १२५

२७१२५

गणितांतील साधारण रीति अशी आहे.

२७,१२५ (४५

६४

$४^२ \times ३ = ४८$) २७१२५

$५^३ =$ १२५

$५^२ \times ४ \times ३ =$ ३००

$५ \times ४^२ \times ३ =$ २४०

२७१२५

उदाहरणें.

१. $४अ^२ + ४अब + ब^२$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

$४अ^२ + ४अब + ब^२$ ($२अ + ब$ = मूळ.

$४अ^२$

$४अ + ब$) $४अब + ब^२$

$४अब + ब^२$

२. $\sqrt{(२०क्ष^२य^२ + ३०क्षय^३ + १२क्ष^३य + २५य^४ + ४क्ष^४)}$.

$९क्ष^{२}य^{२}+२०क्ष^{२}य^{२}+३०क्षय^{३}+१२क्ष^{३}य+२५य^{४}+४क्ष^{४}$

$९क्ष^{२}य^{२}$ $(३क्षय+२क्ष^{२}+५य^{२}.$

$६क्षय+२क्ष^{२})$ $१२क्ष^{३}य \quad +४क्ष^{४}$

$१२क्ष^{३}य \quad +४क्ष^{४}$

$६क्षय+४क्ष^{२}+५य^{२})$ $३०क्षय^{३}+२०क्ष^{२}य^{२}+२५य^{४}$

$३०क्षय^{३}+२०क्ष^{२}य^{२}+२५य^{४}$

ह्या उदाहरणांत $२९क्ष^{२}य^{२} = ९क्ष^{२}य^{२}+२०क्ष^{२}य^{२}$ व जसजसें सोईस पडलें तसतशीं दुसरीं पदें खालीं घेतलीं आहेत.

३. $\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}$

$अ^{२}-क्ष^{२}\left(अ-\frac{क्ष^{२}}{२अ}-\frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}}-\frac{क्ष^{६}}{१६अ^{५}}-\right.$ इत्यादि = मूळ.

$अ^{२}$

$२अ-\frac{क्ष^{२}}{२अ})$ $-क्ष^{२}$

$-क्ष^{२}+\frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}}$

$२अ-\frac{क्ष^{२}}{अ}-\frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}})$ $-\frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}}$

$-\frac{क्ष^{४}}{४अ^{२}}+\frac{क्ष^{६}}{८अ^{४}}+\frac{क्ष^{८}}{६४अ^{६}}$

$२अ-\frac{क्ष^{२}}{अ}-\frac{क्ष^{४}}{४अ^{३}})$ $-\frac{क्ष^{६}}{८अ^{४}}-\frac{क्ष^{८}}{६४अ^{६}}$

येथें ही कृति संपावयाची नाहीं, व जें मूळ आहे तें $\sqrt{अ^2 - क्ष^2}$ ह्याचे किमतीचे जवळजवळ मात्र आहे.

४. $८अ^3 - ८४अ^2क्ष + २९४अक्ष^2 - ३४३क्ष^3$ ह्याचें घनमूळ काढ.

$$८अ^3 - ८४अ^2क्ष + २९४अक्ष^2 - ३४३क्ष^3 \,(\,२अ - ७क्ष$$

$$८अ^3$$

$$(२अ)^2 \times ३ = १२अ^2 \,)\quad - ८४अ^2क्ष + २९४अक्ष^2 - ३४३क्ष^3$$

$$(-७क्ष)(२अ)^2 \times ३ = - ८४अ^2क्ष$$

$$(-७क्ष)^2(२अ) \times ३ = + २९४अक्ष^2$$

$$(-७क्ष)^3 = - ३४३क्ष^3$$

$$- ८४अ^2क्ष + २९४अक्ष^2 - ३४३क्ष^3$$

५. $\sqrt[3]{(अ^3 + ३अ^2ब + ३अ^2क + ३अब^2 + ६अबक + ३अक^2 + ब^3 + ३ब^2क + ३बक^2 + क^3)}$.

$\text{अ}^{३}+३\text{अ}^{२}\text{ब}+३\text{अ}^{२}\text{क}+३\text{अब}^{२}+६\text{अबक}+३\text{अक}^{२}+\text{ब}^{३}+३\text{ब}^{२}\text{क}+३\text{बक}^{२}+\text{क}^{३}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}$.

$\text{अ}^{३}$

$३\text{अ}^{२}\,)\;३\text{अ}^{२}\text{ब}\quad+३\text{अब}^{२}\quad+\text{ब}^{३}$

$\text{ब}\times\text{अ}^{२}\times३ = ३\text{अ}^{२}\text{ब}$

$\text{ब}^{२}\times\text{अ}\times३ = +३\text{अब}^{२}$

$\text{ब}^{३} = +\text{ब}^{३}$

$(\text{अ}+\text{ब})^{२}\times३=३\text{अ}^{२}+६\text{अब}+३\text{ब}^{२})\;३\text{अ}^{२}\text{क}\quad+६\text{अबक}+३\text{अक}^{२}\quad+३\text{बक}^{२}+३\text{कब}^{२}+\text{क}^{३}$

$\text{क}\times(\text{अ}+\text{ब})^{२}\times३ = ३\text{अ}^{२}\text{क}\quad+६\text{अबक}\quad+३\text{कब}^{२}$

$\text{क}^{२}\times(\text{अ}+\text{ब})\times३ = +३\text{अक}^{२}\quad+३\text{बक}^{२}$

$\text{क}^{३} = +\text{क}^{३}$

$३\text{अ}^{२}\text{क}+६\text{अबक}+३\text{अक}^{२}+३\text{बक}^{२}+३\text{कब}^{२}+\text{क}^{३}$.

६. असें दाखवा कीं, $\sqrt{४क्ष^२-४अक्ष+अ^२} = २क्ष-अ$.

७. $\sqrt{१-८अ+१६अ^२} = १-४अ$.

८. $\sqrt{२५अ^२+४०अक्ष+१६क्ष^२} = ५अ+४क्ष$.

९. $\sqrt{९क्ष^२-३क्ष+\frac{१}{४}} = ३क्ष-\frac{१}{२}$.

१०. $\sqrt{४९अ^४+४२अ^२ब+९ब^२} = ७अ^२+३ब$.

११. $\sqrt{(क्ष^२-२अक्ष+अ^२+२क्ष-२अ+१)} = क्ष-अ+१$.

१२. $\sqrt{(म^२+२म-१-\frac{२}{म}+\frac{१}{म^२})} = म+१-\frac{१}{म}$.

१३. $\sqrt{(\frac{अ^२}{क्ष^२}-२+\frac{क्ष^२}{अ^२}+\frac{२अ^२}{क्ष}-२क्ष+अ^२)} = \frac{अ}{क्ष}-\frac{क्ष}{अ}+अ$.

१४. $\sqrt[३]{(अ^३-३अ^२क्ष+३अक्ष^२-क्ष^३)} = अ-क्ष$.

१५. $\sqrt[३]{(१-१२अ+४८अ^२-६४अ^३)} = १-४अ$.

१६. $\sqrt[३]{(८अ^३+३६अ^२ब+५४अब^२+२७ब^३)} = २अ+३ब$

१७. $\sqrt[३]{(क्ष^६-६क्ष^५+१५क्ष^४-२०क्ष^३+१५क्ष^२-६क्ष+१)} = क्ष^२-२क्ष+१$.

१८. $\sqrt[३]{(य^६-६य^५+६य^४+१६य^३-१२य^२-२४य-८)} = य^२-२य-२$.

प्रकरण ४

करणी.

(१४) करणी अथवा खंडपदें तींच होत कीं, ज्यांचीं मुळें बरोबर समजत नाहींत; जसें,

$\sqrt{२}$, $\sqrt{५}$, $\sqrt[३]{४}$, $\sqrt[३]{३^{२}}$, $\sqrt{१+क्ष^{२}}$, $\sqrt[३]{क्ष^{२}+अक्ष}$, आणि $\sqrt[३]{२क्ष^{२}}$, हीं पदें खंड आहेत.

हीं मुळें अपूर्णांक घातप्रकारांकांनीं ही दाखवितां येतात; जसें, $२^{\frac{१}{२}}$, $५^{\frac{१}{२}}$, $४^{\frac{१}{३}}$, $३^{\frac{२}{३}}$, $(१+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$, $(क्ष^{२}+अक्ष)^{\frac{१}{३}}$, आणि $(२क्ष^{२})^{\frac{१}{३}}$.

कोणत्याही अखंड पदास करणीचें रूप देतां येईल; जसें, $क्ष = \sqrt{क्ष^{२}} = क्ष^{\frac{२}{२}}$, $क्ष-अ = \sqrt[न]{(क्ष-अ)^{न}} = (क्ष-अ)^{\frac{न}{न}}$, $अ\sqrt{क्ष} = अ^{\frac{२}{२}}क्ष^{\frac{१}{२}} = (अ^{२}क्ष)^{\frac{१}{२}} = \sqrt{अ^{२}क्ष}$.

उदाहरणें.

१. असें सिद्ध करा कीं, $\sqrt{२४३}+\sqrt{२७}+\sqrt{४८} = १६\sqrt{३}$.

$$\sqrt{२४३} = \sqrt{८१\times३} = ९\sqrt{३}$$

$$\sqrt{२७} = \sqrt{९\times३} = ३\sqrt{३}$$

$$\sqrt{४८} = \sqrt{१६\times३} = ४\sqrt{३}$$

$\therefore \sqrt{२४३} + \sqrt{२७} + \sqrt{४८} = ९\sqrt{३} + ३\sqrt{३} + ४\sqrt{३}$

$= (९+३+४)\sqrt{३} = १६\sqrt{३}.$

२. असें सिद्ध करा कीं, $२\sqrt{८अ^३} - ७अ\sqrt{१८अ} + ५\sqrt{७२अ^३} - \sqrt{५०अब^२} = (१३अ-५ब)\sqrt{२अ}.$

$२\sqrt{८अ^३} = २\sqrt{४\times२\times अ^२\times अ} = २\times२अ\sqrt{२अ} = ४अ\sqrt{२अ}$

$-७अ\sqrt{१८अ} = -७अ\sqrt{९\times२अ} = -७अ\times३\sqrt{२अ},$

$= -२१अ\sqrt{२अ},$

$५\sqrt{७२अ^३} = ५\sqrt{३६अ^२\times२अ} = ५\times६अ\sqrt{२अ} = ३०अ\sqrt{२अ},$

$-\sqrt{५०अब^२} = -\sqrt{२५ब^२\times२अ} = -५ब\sqrt{२अ};$

आणि $४अ\sqrt{२अ} - २१अ\sqrt{२अ} + ३०अ\sqrt{२अ} - ५ब\sqrt{२अ}$

$= (४अ-२१अ+३०अ-५ब)\sqrt{२अ} = (१३अ-५ब)\sqrt{२अ}.$

३. $४\sqrt{\frac{७}{३}} + ५\sqrt{\frac{१}{२}}$ ह्यांस $\sqrt{\frac{७}{३}} + २\sqrt{\frac{१}{२}}$ ह्यांनीं गूण.

हा गुणाकार बीजांतील साधारणपदांच्या गुणाकाराप्रमाणेंच करतां येईल; ह्मणजे,

$$
\begin{array}{l}
४\sqrt{\frac{७}{३}} + ५\sqrt{\frac{१}{२}} \\
\underline{\sqrt{\frac{७}{३}} + २\sqrt{\frac{१}{२}}} \\
४\times\frac{७}{३} + ५\sqrt{\frac{७}{६}} \\
\underline{\qquad\qquad ८\sqrt{\frac{७}{६}} + १०\times\frac{१}{२}} \\
\frac{२८}{३} + १३\sqrt{\frac{७}{६}} + ५ = \frac{२८}{३} + \frac{१५}{३} + १३\sqrt{\frac{७}{६}} = \frac{४३}{३} + १३\sqrt{\frac{७}{६}}.
\end{array}
$$

४. असें सिद्ध कर कीं, $१२\sqrt[३]{\frac{१}{४}} + ३\sqrt[३]{\frac{१}{३२}} = \frac{२७}{४}\sqrt[३]{२}$.

$$१२\sqrt[३]{\frac{१}{४}} = १२\sqrt[३]{\frac{२}{८}} = \frac{१२}{२}\sqrt[३]{२},$$

$$३\sqrt[३]{\frac{१}{३२}} = ३\sqrt[३]{\frac{२}{६४}} = \frac{३}{४}\sqrt[३]{२};$$

आणि $\frac{१२}{२}\sqrt[३]{२} + \frac{३}{४}\sqrt[३]{२} = \frac{२४}{४}\sqrt[३]{२} + \frac{३}{४}\sqrt[३]{२} = \frac{२७}{४}\sqrt[३]{२}$

५. $(२\sqrt{८} + ३\sqrt{५} - ७\sqrt{२})$ आणि $(\sqrt{७२} - ५\sqrt{२०} - २\sqrt{२})$ ह्यांस अतिसरळ रूप दे, आणि ह्यांचा गुणाकार काढ.

$$२\sqrt{८} = २\sqrt{४\times२} = २\times२\sqrt{२} = ४\sqrt{२},$$

$$\therefore २\sqrt{८} + ३\sqrt{५} - ७\sqrt{२} = ४\sqrt{२} + ३\sqrt{५} - ७\sqrt{२}$$
$$= ३\sqrt{५} - ३\sqrt{२};$$

$$\sqrt{७२} = \sqrt{३६\times२} = ६\sqrt{२},$$

आणि $-५\sqrt{२०} = -५\sqrt{४\times५} = -५\times२\sqrt{५} = -१०\sqrt{५}$,

$$\therefore \sqrt{७२} - ५\sqrt{२०} - २\sqrt{२} = ६\sqrt{२} - १०\sqrt{५} - २\sqrt{२}$$
$$= ४\sqrt{२} - १०\sqrt{५};$$

$$
\begin{array}{l}
३\sqrt{५} - ३\sqrt{२} \\
४\sqrt{२} - १०\sqrt{५} \\
\hline
१२\sqrt{१०} - १२\times२ \\
\qquad - ३०\times५ + ३०\sqrt{१०} \\
\hline
४२\sqrt{१०} - २४ - १५० = ४२\sqrt{१०} - १७४.
\end{array}
$$

६. $\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} + \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}}$ हें एका अपूर्णपदांत आण.

ह्यांस समच्छेद केल्यानें,

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२-ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}-ब^२}{अ^२+ब^२},$$

$$\frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२-ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}-ब^२}{अ^२+ब^२};$$

म्हणून बेरीज घेतल्यानें,

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} + \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{२अ^२-२ब^२}{अ^२+ब^२} = \frac{२(अ^२-ब^२)}{अ^२+ब^२}.$$

ह्या उदाहरणावरून द्वियुग्मपदकरणीचें अखंड पद करण्याची रीति निघते. कारण, ह्या उदाहरणांतील अपूर्णपदांचे छेद अशा एका पदानें गुणिले कीं, ज्या गुणाकारानें ते अखंड पद झाले. (क्ष+य) (क्ष-य) $=$(क्ष^२-य^२), ह्यास्तव अ $\pm$ $\sqrt{}$ब अथवा $\sqrt{}$अ $\pm$ $\sqrt{}$ब असल्या रूपाचे करणीस त्यासारिख्याच अ $\mp$ $\sqrt{}$ब अथवा $\sqrt{}$अ $\mp$ $\sqrt{}$ब ह्या रूपाच्या करणीनें गुणलें असतां तिला

अखंड रूपांत आणतां येईल. ज्या वेळेस बेरीज दिली असेल त्या वेळेस वरचें चिन्ह धरावें, आणि ज्या वेळेस वजाबाकी दिली असेल त्या वेळेस खालचें चिन्ह धरावें.

७. ह्यांत असें सिद्ध करा कीं.

$$\frac{१}{\sqrt{२}+\sqrt{३}-\sqrt{५}} = \frac{\sqrt{३०}+३\sqrt{२}+२\sqrt{३}}{१२}.$$

त्यांच्या दोन्ही पदांस $\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}$ ह्यांनीं गूण,

$$\frac{१}{\sqrt{२}+\sqrt{३}-\sqrt{५}} \times \frac{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}}{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}} = \frac{\sqrt{२}+\sqrt{३}+\sqrt{५}}{२\sqrt{६}};$$

दोनही पदांस $\sqrt{६}$ ह्यांनीं गुणल्यानें,

$$\frac{\sqrt{१२}+\sqrt{१८}+\sqrt{३०}}{२\times६} = \frac{२\sqrt{३}+३\sqrt{२}+\sqrt{३०}}{१२}.$$

८. $अ^{\frac{३}{४}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{४}}+अ^{\frac{१}{४}}ब+ब^{\frac{३}{४}}$ ह्यांस $अ^{\frac{१}{४}}-ब^{\frac{१}{४}}$ ह्यांनीं गूण.

$$\begin{array}{l}
अ^{\frac{३}{४}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{४}}+अ^{\frac{१}{४}}ब+ब^{\frac{३}{४}} \\
अ^{\frac{१}{४}}-ब^{\frac{१}{४}} \\
\hline
अ+अ^{\frac{३}{४}}ब^{\frac{१}{४}}+अ^{\frac{२}{४}}ब+अ^{\frac{१}{४}}ब^{\frac{३}{४}} \\
\quad -अ^{\frac{३}{४}}ब^{\frac{१}{४}}-अ^{\frac{१}{२}}ब-अ^{\frac{१}{४}}ब^{\frac{३}{४}}-ब^{१} \\
\hline
अ \quad ※ \quad ※ \quad\quad ※ \quad -ब^{१}
\end{array}$$

९. त्यांत असें दाखीव कीं,

$$\sqrt{\left\{१+\frac{११अ}{४}-(१+अ)\sqrt{३अ}+अ^२\right\}}=१-\frac{\sqrt{३}}{२}\sqrt{अ}+अ.$$

$$१+\frac{११अ}{४}-\sqrt{३}\,अ^{\frac{१}{२}}-\sqrt{३}\,अ^{\frac{३}{२}}+अ^२\Big(१-\frac{\sqrt{३}}{२}अ^{\frac{१}{२}}+अ$$

$$१$$

$$२-\frac{\sqrt{३}}{२}अ^{\frac{१}{२}}\Big)\;-\sqrt{३}अ^{\frac{१}{२}}+\frac{११अ}{४}$$

$$-\sqrt{३}अ^{\frac{१}{२}}+\frac{३अ}{४}$$

$$२-\sqrt{३}अ^{\frac{१}{२}}+अ\Big)\;२अ-\sqrt{३}अ^{\frac{३}{२}}+अ^२$$

$$२अ-\sqrt{३}अ^{\frac{३}{२}}+अ^२.$$

* * *

१०. असें दाखीव की $\sqrt{१२}+\sqrt{२७}-\sqrt{३}+\sqrt{४८}=८\sqrt{३}.$

११. ..... $\sqrt[३]{४०}-३\sqrt[३]{३२०}+४\sqrt[३]{१३५}=२\sqrt[३]{५}.$

१२. ..... $\sqrt[३]{१६}-६\sqrt[३]{\frac{१}{४}}+२\sqrt[३]{५४}-४\sqrt[३]{\frac{१}{३२}}=४\sqrt[३]{२}.$

१३. ..... $२\sqrt{\frac{अ}{२}}-ब\sqrt{\frac{अ}{ब}}=\sqrt{२अ}-\sqrt{अब}.$

१४. ..... $५\sqrt{अ^३}-(४अ)^{\frac{३}{२}}-३अ^{\frac{३}{२}}+\sqrt{१६अ^३}=$

$२अ^{\frac{१}{२}}(अ+१$

१५. ..... $२\sqrt[३]{२क्ष}+६\sqrt[६]{४क्ष^२}+\sqrt[९]{८क्ष^३}=९\sqrt[३]{२क्ष}$

१६. ..... $\sqrt{१८अ^५ब^३}+\sqrt{५०अ^३ब^३}=$

$(३अ^२ब+५अब)\sqrt{२अब}$

१७. ..... $\sqrt[३]{५}\times १०\sqrt[३]{६}\times\sqrt[३]{\frac{१}{२}}=१०\sqrt[३]{१५}$

१८ ...... $(\sqrt{५}+१)(१-\sqrt{५}) = -४$.

१९. ...... $(\sqrt{३}+\sqrt{२})(\sqrt{३}-\sqrt{२}) = १$.

२० ...... $\frac{\sqrt{अ}+\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}-\sqrt{ब}} = \frac{अ+२अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+ब}{अ-ब}$.

२१ ...... $\sqrt[६]{\frac{१}{क्ष^{३}य^{२}}} \times \sqrt[५]{क्ष^{२}} \times \sqrt[३]{य} = \frac{१}{क्ष^{\frac{१}{१०}}}$.

२२ ...... $\frac{\sqrt{३}-\sqrt{२}}{\sqrt{२}+१} = \sqrt{२}-\sqrt{३}+\sqrt{६}-२$.

२३ ...... $(\sqrt{३}+\sqrt{२})^{३} = ९\sqrt{३}+११\sqrt{२}$.

२४. ...... $\frac{१}{क्ष-\sqrt{क्ष^{२}-१}} + \frac{१}{क्ष+\sqrt{क्ष^{२}-१}} = २क्ष$.

२५. ...... $\frac{\sqrt{क्ष+य}+\sqrt{क्ष-य}}{\sqrt{क्ष+य}-\sqrt{क्ष-य}} = \frac{क्ष}{य}+\frac{\sqrt{क्ष^{२}-य^{२}}}{य}$.

२६. ...... $\frac{\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}}{२}+\frac{क्ष}{२} = \sqrt{\left(\frac{क्ष}{२}\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}+\frac{अ^{२}}{४}\right)}$

२७ $\left\{\frac{\sqrt{क्ष+\sqrt{क्ष^{२}-अ}}}{\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{क्ष-\sqrt{क्ष^{२}-अ}}}{\sqrt{२}}\right\}^{२}$

$= क्ष+\sqrt{अ}$.

प्रकरण ५.

एकवर्णसमीकरणें.

१. $\sqrt{क्ष+१६} = २ + \sqrt{क्ष}$ ह्यांत क्षची किंमत काढ.

समीकरणाचे प्रत्येक बाजूचा वर्ग केल्यानें,

$$क्ष + १६ = ४ + ४\sqrt{क्ष} + क्ष,$$

$$१६ - ४ = ४\sqrt{क्ष},$$

$$१२ = ४\sqrt{क्ष},$$

$$३ = \sqrt{क्ष}, \therefore ९ = क्ष.$$

२. $\frac{क्ष - अ}{\sqrt{अ} + \sqrt{क्ष}} = \frac{\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ}}{३} + २\sqrt{अ}$, ह्यांत क्षची किंमत काढ.

समीकरणाचे डावे बाजूस संक्षेप केल्यानें,

$$\frac{क्ष - अ}{\sqrt{अ} + \sqrt{क्ष}} = \frac{(\sqrt{क्ष} + \sqrt{अ})(\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ})}{\sqrt{क्ष} + \sqrt{अ}} = \sqrt{क्ष} - \sqrt{अ};$$

$$\therefore \sqrt{क्ष} - \sqrt{अ} = \frac{\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ}}{३} + २\sqrt{अ},$$

$$३(\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ}) = (\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ}) + ६\sqrt{अ},$$

$$२(\sqrt{क्ष} - \sqrt{अ}) = ६\sqrt{अ};\ \sqrt{क्ष} - \sqrt{अ} = ३\sqrt{अ},$$

$$\sqrt{क्ष} = ४\sqrt{अ}, \therefore क्ष = १६अ.$$

३. $\frac{क्ष}{\sqrt{अ^2+क्ष^2}} = \frac{क-क्ष}{\{ब^2+(क-क्ष)^2\}^{\frac{1}{2}}}$.

दोनही बाजूंचे वर्ग केल्यानें,

$$\frac{क्ष^2}{अ^2+क्ष^2} = \frac{(क-क्ष)^2}{ब^2+(क-क्ष)^2};$$

छेदांचे गुणाकारानें गुणिल्यानें,

$$ब^2क्ष^2+(क-क्ष)^2क्ष^2 = अ^2(क-क्ष)^2+क्ष^2(क-क्ष)^2$$

$$ब^2क्ष^2 = अ^2(क-क्ष)^2; बक्ष = अ(क-क्ष) = अक-अक्ष;$$

$$अक्ष+बक्ष = अक, (अ+ब)क्ष = अक, \therefore क्ष = \frac{अक}{अ+ब}.$$

४. $१-\sqrt{१-क्ष} = न(१+\sqrt{१-क्ष})$.

$$१-\sqrt{१-क्ष} = न+न\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-न = न\sqrt{१-क्ष}+\sqrt{१-क्ष} = (न+१)\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-२न+न^2 = (न^2+२न+१)(१-क्ष),$$

$$= न^2+२न+१-क्ष(न+१)^2,$$

$$क्ष(न+१)^2 = ४न,$$

$$\therefore क्ष = \frac{४न}{(न+१)^2}.$$

५. $क्ष-४ = \frac{क्ष^2}{(१+\sqrt{१+क्ष})^2}$, ह्यांत क्षची किंमत काढ.

$$\sqrt{क्ष-४}=\frac{क्ष}{\sqrt{१+क्ष}+१}=\frac{क्ष(\sqrt{१+क्ष}-१)}{(\sqrt{१+क्ष}+१)(\sqrt{१+क्ष}-१)}=\frac{क्ष(\sqrt{१+क्ष}-१)}{(१+क्ष-१)}$$

$$=\frac{क्ष(\sqrt{१+क्ष}-१)}{क्ष}=\sqrt{१+क्ष}-१;$$

$$\therefore क्ष-४=१+क्ष-२\sqrt{१+क्ष}+१,$$

$$२\sqrt{१+क्ष}=६,\ \sqrt{१+क्ष}=३;$$

$$१+क्ष=९,\ \therefore क्ष=८.$$

६. $८\sqrt{३क्ष}+\frac{२४३+३२४\sqrt{३क्ष}}{१६क्ष-३}=१६क्ष+३.$

$$१६क्ष-८\sqrt{३}\sqrt{क्ष}+३=\frac{८१(३+४\sqrt{३क्ष})}{१६क्ष-३}$$

$$=\frac{८१\sqrt{३}(\sqrt{३}+४\sqrt{क्ष})}{(४\sqrt{क्ष}+\sqrt{३})(४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})},$$

$$(४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})^{२}=\frac{८१\sqrt{३}}{४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३}},\ (४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३})^{३}=३^{४}\cdot३^{\frac{१}{२}}=३^{\frac{९}{२}},$$

$$४\sqrt{क्ष}-\sqrt{३}=३^{\frac{३}{२}},\ ४\sqrt{क्ष}=३^{\frac{३}{२}}+३^{\frac{१}{२}},$$

$$१६क्ष=३^{३}+३^{२}\cdot२+३=२७+१८+३=४८,\ \therefore क्ष=३.$$

७. $\sqrt[३]{अ+क्ष}+\sqrt[३]{अ-क्ष}=\sqrt[३]{ब}$, ह्यांत क्षची किंमत काढ.

$(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}+(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}=ब^{\frac{१}{३}}$; दोनही बाजूंचे घन केल्यानें,

$$अ+क्ष+अ-क्ष+३\left\{(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}+(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}\right\}$$

$$\times(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}=ब,$$

$$३\{(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}+(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}\}(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}=ब-२अ,$$

$$३ब^{\frac{१}{३}}(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}=ब-२अ;\because(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}+(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}=ब^{\frac{१}{३}},$$

$$\sqrt[३]{(अ+क्ष)(अ-क्ष)}=\frac{ब-२अ}{३ब^{\frac{१}{३}}},(अ+क्ष)(अ-क्ष)=\frac{(ब-२अ)^३}{२७ब},$$

$$अ^२-क्ष^२=\frac{(ब-२अ)^३}{२७ब}, क्ष^२=अ^२-\frac{(ब-२अ)^३}{२७ब},$$

$$\therefore क्ष=\sqrt{अ^२-\frac{(ब-२अ)^३}{२७ब}}.$$

८. $क्ष\sqrt{क्ष^४-१}+\sqrt{क्ष^४-१}=क्ष^३$, ह्यांत क्षची किंमत काढ.

$$\sqrt{क्ष^४-१}=क्ष^३-क्ष\sqrt{क्ष^४-१};\ क्ष^४-१=क्ष^६-२क्ष^४\sqrt{क्ष^४-१}+क्ष^६-क्ष^२;$$

$$क्ष^२+क्ष^४-१=२क्ष^६-२क्ष^४\sqrt{क्ष^४-१}=२क्ष^४(क्ष^२-\sqrt{क्ष^४-१});$$

दोन्ही बाजूंस $(क्ष^२+\sqrt{क्ष^४-१})$ ह्यांनीं गुणिल्यानें,

$$(क्ष^२+\sqrt{क्ष^४-१})^२=२क्ष^४(क्ष^४-क्ष^४+१)=२क्ष^४;$$

$$क्ष^२+\sqrt{क्ष^४-१}=क्ष^२\sqrt{२},\ \sqrt{क्ष^४-१}=क्ष^२(\sqrt{२}-१);$$

$$क्ष^४-१=क्ष^४(३-२\sqrt{२})=३क्ष^४-२क्ष^४\sqrt{२},$$

$$(२\sqrt{२}-२)क्ष^४=१,\ क्ष^४=\frac{१}{२\sqrt{२}-२};$$

ह्या अपूर्णांकाच्या दोन्ही पदांस $\sqrt{२}+१$ ह्यांनीं गुणिल्यानें,

$$क्ष^४=\frac{\sqrt{२}+१}{२},\ \therefore क्ष=\sqrt[४]{\frac{\sqrt{२}+१}{२}}.$$

९. $$\frac{अ+क्ष}{\sqrt{अ}+\sqrt{अ+क्ष}}+\frac{अ-क्ष}{\sqrt{अ}+\sqrt{अ-क्ष}}=\sqrt{अ}.$$

$$\frac{(अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष})}{अ-\overline{अ+क्ष}}+\frac{(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष})}{अ-\overline{अ-क्ष}}=\sqrt{अ},$$

$$\frac{(अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष})}{-क्ष}+\frac{(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष})}{क्ष}=\sqrt{अ},$$

$$(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष})-(अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष})=\sqrt{अ}\cdot क्ष,$$

$$अ\sqrt{अ}-\sqrt{अ}\cdot क्ष-(अ-क्ष)^{\frac{3}{2}}-अ\sqrt{अ}-\sqrt{अ}\cdot क्ष$$
$$+(अ+क्ष)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{अ}\cdot क्ष,$$

$$(अ+क्ष)^{\frac{3}{2}}-(अ-क्ष)^{\frac{3}{2}}=३\sqrt{अ}\cdot क्ष,$$

$$(अ+क्ष)^{३}+(अ-क्ष)^{३}-२(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{3}{2}}=९अक्ष^{२},$$

$$२अ^{३}+६अक्ष^{२}-९अक्ष^{२}=२(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{3}{2}},$$

$$२अ^{३}-३अक्ष^{२}=२(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{3}{2}};$$

$$४अ^{६}-१२अ^{४}क्ष^{२}+९अ^{२}क्ष^{४}=४(अ^{२}-क्ष^{२})^{३},$$

$$=४अ^{६}-१२अ^{४}क्ष^{२}+१२अ^{२}क्ष^{४}-४क्ष^{६};$$

$$४क्ष^{६}=३क्ष^{४}अ^{२},\ ४क्ष^{२}=३अ^{२},$$

$$२क्ष=अ\sqrt{३},\ \therefore क्ष=\frac{अ}{२}\sqrt{३}.$$

(१९). ज्या समीकरणांत क्ष आणि य अशीं दोन अ-व्यक्त पदें आहेत तीं समीकरणें सोडवावयाचीं असल्यास

खालच्या तीन रीतींतून एकादी रीति घ्यावी.

१. दोन अव्यक्त पदांपैकीं एक अव्यक्त पद उडीव, आणि जें समीकरण निघेल, त्यापासून दुसऱ्या अव्यक्तपदाची किंमत काढ.

२. कोणत्याही एका अव्यक्तपदाची किंमत प्रत्येक समीकरणांतून काढ. आणि दोन किंमती बराबर मांड.

३. एका अव्यक्त पदाची किंमत कोणत्याही एका समीकरणांतून काढ, आणि ती दुसऱ्या समीकरणांत मांड.

१. ५क्ष+३य=७४ } त्यांत क्ष आणि य त्यांच्या किंमती
३क्ष+२य=४६ } पहिल्या रीतीनें काढ.

पहिल्या समीकरणास दुसऱ्यांतील य चा जो वेळाप्रकाशक २ आहे, त्यानें गूण, आणि दुसऱ्या समीकरणास, पहिल्यांतील य चा जो वेळाप्रकाशक ३ आहे, त्यानें गूण.

१०क्ष+६य = १४८,

९क्ष+६य = १३८.

आतां प्रत्येक समीकरणांत य चा वेळाप्रकाशक एकच आहे व चिन्हें ही सरूप आहेत, म्हणून खालचें समीकरण वरल्या समीकरणांत जर वजा केलें, तर य+

+ जीं अव्यक्तपदें उडवायाचीं आहेत त्यांचीं चिन्हें सरूप नसतील, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची बेरीज घ्यावी.

उडून जाईल, आणि

$$क्ष = १० ;\quad \therefore ३क्ष = ३०$$

आणि, दुसरे समीकरणांत ३क्षचे जागीं ३० लिहिल्यानें,

$$३० + २य = ४६,\quad २य = १६,\quad \therefore य = ८.$$

जेव्हां तीन अथवा त्यांहून अधिक समीकरणें दिलीं आहेत, तेव्हां त्यांतील दोन दोन समीकरणांची एक एक जोडी घेऊन प्रत्येक जोडींतून तेंच अव्यक्त पद उडवावें.

२. $क्ष^{म} य^{न} = अ \cdots (१)$ | $क्ष^{प} य^{क} = ब \cdots (२)$ ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती दुसरे रीतीनें काढ.

$$(१)\text{ ह्यापासून } क्ष^{म} = \frac{अ}{य^{न}},\quad \therefore क्ष = \frac{अ^{\frac{१}{म}}}{य^{\frac{न}{म}}};$$

$$(२) \cdots\cdots\; क्ष^{प} = \frac{ब}{य^{क}},\quad \therefore क्ष = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{य^{\frac{क}{प}}},$$

त्या दोन्ही किंमती क्ष ह्याच पदाच्या आहेत, म्हणून त्या परस्पर बरोबर आहेत, ह्यास्तव त्यांचें समीकरण मांडल्यास चालेल; म्हणजे,

$$\frac{अ^{\frac{१}{म}}}{य^{\frac{न}{म}}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{य^{\frac{क}{प}}},\quad \therefore \frac{य^{\frac{क}{प}}}{य^{\frac{न}{म}}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}},$$

अथवा, $य^{\frac{क}{प}-\frac{न}{म}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}}$,

अथवा, $य^{\frac{कम-नप}{पम}} = \frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}}$,

$$\therefore य = \left(\frac{ब^{\frac{१}{प}}}{अ^{\frac{१}{म}}}\right)^{\frac{पम}{कम-नप}} = \left(\frac{ब^{म}}{अ^{प}}\right)^{\frac{१}{कम-नप}}.$$

ह्याप्रमाणेंच दोन्ही समीकरणांतून क्षच्या दोन किंमती काढून त्यांचें समीकरण केल्यानें,

$$क्ष = \left(\frac{अ^{क}}{ब^{न}}\right)^{\frac{१}{कम-नप}}.$$

३. $\frac{य}{क्ष} + \frac{३क्ष}{क्ष+य} = \frac{क्ष^{२}-य^{२}}{य} \ldots (१)$, $\frac{क्ष}{य} = \frac{क्ष+य}{क्ष} + \frac{य}{क्ष} \ldots (२)$ } ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती तिसऱ्या रीतीनें काढ.

(२) $\frac{क्ष}{य} - \frac{य}{क्ष} = \frac{क्ष+य}{क्ष}$, $\frac{क्ष^{२}-य^{२}}{क्षय} = \frac{क्ष+य}{क्ष}$;

आणि दोन्ही बाजूंस $\frac{क्ष+य}{क्ष}$ ह्यानें भागल्यानें,

$$\frac{क्ष-य}{य} = १, \quad \therefore क्ष - य = य;$$

$क्ष = २य$, $क्ष^{२} = ४य^{२}$ } ह्या किंमती (१) ह्यांत ठेवल्यानें,

$\frac{य}{२य} + \frac{६य}{२य+य} = \frac{४य^२ - य^२}{य}$, $\frac{१}{२} + \frac{६}{२+१} = ४य - य$, $\frac{१}{२} + \frac{६}{३} = ३य$,

$३ + १२ = १८य$, अथवा, $१८य = १५$,

$\therefore य = \frac{१५}{१८} = \frac{५}{६}$, आणि $क्ष = २य = \frac{५}{३}$.

४. $\frac{क्षय}{क्ष+य} = ७०$, $\frac{क्षज्ञ}{क्ष+ज्ञ} = ८४$, $\frac{यज्ञ}{य+ज्ञ} = १४०$;

त्यांत क्ष, य, आणि ज्ञ ह्यांच्या किंमती काढ.

पहिल्या समीकरणांतील प्रत्येक बाजूचा व्युत्क्रम* घेतल्यानें,

$\frac{क्ष+य}{क्षय} = \frac{१}{७०}$, अथवा $\frac{क्ष}{क्षय} + \frac{य}{क्षय} = \frac{१}{७०}$;

$\therefore \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} = \frac{१}{७०}$, ...(१)

$\frac{१}{क्ष} + \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{८४}$, ...(२)

$\frac{१}{य} + \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{१४०}$, ...(३)

आणि ह्याप्रमाणेंच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या समीकरणांपासून,

(१) $\frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} = \frac{२}{१४०}$, ह्यांतून (३) वजा केल्यानें,

$\frac{१}{क्ष} - \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{१४०} = \frac{३}{४२०}$,

---

* एकास कोणत्याही पदानें भागलें म्हणजे तो भागाकार त्या पदाचा व्युत्क्रम होतो. जसें, क्ष, $\frac{क्ष}{क}$, आणि $\frac{अ+ब}{स}$, ह्यांचे व्युत्क्रम अनुक्रमें, $\frac{१}{क्ष}$, $\frac{क}{क्ष}$, आणि $\frac{स}{अ+ब}$, हे आहेत.

(२) $\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{ज्ञ}=\frac{१}{८४}=\frac{५}{४२०}$

$\therefore \frac{२}{क्ष} = \frac{८}{४२०}=\frac{२}{१०५}$, $\therefore$ क्ष $=१०५$.

आणि $\frac{२}{ज्ञ}=\frac{२}{४२०}$, $\therefore$ ज्ञ $=४२०$.

(३) $\frac{१}{य}+\frac{१}{४२०}=\frac{१}{१४०}$, $\therefore \frac{१}{य}=\frac{३}{४२०}-\frac{१}{४२०}=\frac{२}{४२०}=\frac{१}{२१०}$,

$\therefore$ य $=२१०$.

हीं पुढील एकवर्णसमीकरणें सोडीव.

१. $\sqrt{क्ष^२+३}=\sqrt{७}$. उत्तर. क्ष $=२$.

२. $\sqrt{क्ष^२-१६}=क्ष-२$. उत्तर. क्ष $=५$.

३. $\sqrt{क्ष}-१=\sqrt{क्ष-९}$. उत्तर. क्ष $=२५$.

४. $\sqrt{क्ष}+\sqrt{क्ष-३}=३$. उत्तर. क्ष $=४$.

५. $\sqrt{क्ष}-\sqrt{२}=\sqrt{क्ष-२}$. उत्तर. क्ष $=२$.

६. $\sqrt[३]{४क्ष+३}=३$. उत्तर. क्ष $=६$.

७. $\sqrt{५क्ष+४}=\sqrt{३क्ष}+२$. उत्तर. क्ष $=१२$.

८. $\sqrt{क्ष^२+अ^२}+क्ष=ब$ उत्तर. क्ष $=\frac{ब^२-अ^२}{२ब}$.

९. $२\sqrt{\text{क्ष}} - \sqrt{\text{अ}} = २\sqrt{\text{क्ष} - \text{अ}}$ उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{२५\text{अ}}{१६}$

१०. $\text{अ} + \text{क्ष} = \sqrt{\text{क्ष}^२ + ५\text{क्ष} - \text{अ}}$ उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{\text{अ}^२ + \text{अ}}{५ - २\text{अ}}$.

११. $\sqrt{\text{अ}^२ + \text{क्ष}^२} = \sqrt[४]{\text{ब}^४ + \text{क्ष}^४}$.   उत्तर. $\text{क्ष} = \sqrt{\frac{\text{ब}^४ - \text{अ}^४}{२\text{अ}^२}}$

१२. $\sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}} = \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}} - \text{क्ष}$.   उत्तर. $\text{क्ष} = \text{अ} - १$.

१३. $\sqrt{\text{अ} + \text{क्ष}} + \sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}} = २\sqrt{\text{क्ष}}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{४}{५}\text{अ}$.

१४. $\frac{\sqrt{\text{क्ष}} - २}{३} + ३ = \frac{\text{क्ष} - ४}{\sqrt{\text{क्ष}} + २}$.   उत्तर. $\text{क्ष} = ४२\frac{१}{४}$.

१५. $\text{क्ष} - \sqrt{\text{अ}^२ + \text{क्ष}\sqrt{\text{क्ष}^२ - १}} = \text{अ}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{४\text{अ}^२ + १}{४\text{अ}}$.

१६. $\frac{\sqrt{\text{अ} + \text{क्ष}} + \sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}}{\sqrt{\text{अ} + \text{क्ष}} - \sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}} = \text{क}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{२\text{अक}}{\text{क}^२ + १}$.

१७. $\sqrt{\text{क्ष} + \text{अ}} = \sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{क्ष} - \text{अ}}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{५\text{अ}}{४}$

१८. $\sqrt{\text{क्ष}} - \sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}} = \frac{\sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{अ} - \text{क्ष}}}{२}$ उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{९\text{अ}}{१०}$

१९. $\sqrt{\frac{\text{अ}^२}{\text{क्ष}} + \text{ब}} - \sqrt{\frac{\text{अ}^२}{\text{क्ष}} - \text{ब}} = \text{क}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \frac{४\text{अ}^२\text{क}^२}{४\text{ब}^२ + \text{क}^४}$

२०. * $\sqrt{\text{क्ष}^२ + ९} = २ + \frac{\text{क्ष}^२ - ९}{\sqrt{\text{क्ष}^२ + ९} + ३}$. उत्तर. $\text{क्ष} = ३\sqrt{१५}$

---

*: हें उदाहरण सोडवतांना $\sqrt{\text{क्ष}^२ + ९} = -१२$, म्हणून ताळा पाहातांना $\sqrt{\text{क्ष}^२ + ९} = -१२$ घ्यावे; नाहीं तर ताळा जमणार नाहीं, आणि उत्तर खोटेंसें भासूं लागेल.

२१. $\frac{न अ^२}{\sqrt{क्ष^२+अ^२}} - क्ष = \sqrt{अ^२+क्ष^२}$. उत्तर. $क्ष = \frac{(न-१)अ}{(२न-१)^{\frac{१}{२}}}$.

२२. $अक्ष - \sqrt{क्ष^२+क्ष+१} = \sqrt{क्ष^२-क्ष+१}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{२}{अ}\sqrt{\frac{अ^२-१}{अ^२-४}}$.

२३. $\sqrt{अ^२+अक्ष} = अ - \sqrt{अ^२-अक्ष}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{अ}{२}\sqrt{३}$.

२४. $\frac{१}{क्ष} + \frac{१}{अ} = \sqrt{\frac{१}{अ^२} + \sqrt{\frac{४}{ब^२क्ष^२} + \frac{१}{क्ष^४}}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{अब^२}{अ^२-ब^२}$.

२५. $\frac{अक्ष-१}{\sqrt{अक्ष}+१} - ४ = \frac{\sqrt{अक्ष}-१}{२}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{८१}{अ}$.

२६. $\frac{१}{२}\sqrt{क्ष^२+३अ^२} + \frac{१}{२}\sqrt{क्ष^२-३अ^२} = क्ष\sqrt{अ}$.

उत्तर. $क्ष = \sqrt[४]{\frac{९अ^३}{४-४अ}}$.

२७. $\frac{१}{\sqrt{१-क्ष}+१} + \frac{१}{\sqrt{१+क्ष}-१} = \frac{१}{क्ष}$.

उत्तर. क्ष = [illegible].

२८. $\sqrt[3]{१+क्ष} + \sqrt[3]{१-क्ष} = \sqrt[3]{२}$. उत्तर क्ष = १

२९. $\frac{क्ष+\sqrt{क्ष^२-१}}{क्ष-\sqrt{क्ष^२-१}} + \frac{क्ष-\sqrt{क्ष^२-१}}{क्ष+\sqrt{क्ष^२-१}} = ४क्ष(क्ष-१)$

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{२}$

३०. $\left.\begin{array}{l} क्ष+य=५. \\ क्ष-य=१. \end{array}\right\}$ ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या किंमती काढ.

उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३. \\ य = २. \end{array}\right.$

३१. $\left.\begin{array}{l} २क्ष-य=१ \\ क्ष+३य=११ \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष= २. \\ य= ३. \end{array}\right.$

३२. $\left.\begin{array}{l} ४क्ष-११य=९. \\ २क्ष+३य=१३. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष= ५. \\ य= १. \end{array}\right.$

३३. $\left.\begin{array}{l} ३क्ष+२य=२३. \\ ५य-२क्ष=२९. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष= ३. \\ य= ७. \end{array}\right.$

३४. $\left.\begin{array}{l} \frac{क्ष}{२}-य=१. \\ क्ष-\frac{य}{२}=८. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=१०. \\ य=४. \end{array}\right.$

३५. $\left.\begin{array}{l} \frac{क्ष}{३}+\frac{य}{५}-५=०. \\ २क्ष+\frac{य}{३}-१७=०. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=६. \\ य=१५. \end{array}\right.$

३६. $\left.\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{१०}} + \frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{२}} &= \text{०}. \\ \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{५}} + \frac{\text{क्ष}-\text{य}}{\text{२}} &= \text{१}. \end{aligned}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{४}. \\ \text{य} &= \text{६}. \end{aligned}\right.$

३७. $\left.\begin{aligned} \frac{\text{२क्ष}-\text{य}}{\text{४}} - \frac{\text{३}}{\text{२}} &= \frac{\text{३य}}{\text{४}} - \text{क्ष} - \text{२}. \\ \frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{३}} &= \text{२}\frac{\text{२}}{\text{३}}. \end{aligned}\right\}$ उ॰ $\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{३}. \\ \text{य} &= \text{५}. \end{aligned}$

३८. $\left.\begin{aligned} \text{अक्ष} + \text{बय} &= \text{क}. \\ \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}} - \frac{\text{य}}{\text{अ}} &= \text{१}. \end{aligned}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{aligned} \text{क्ष} &= \frac{\text{अब}+\text{क}}{\text{२अ}}. \\ \text{य} &= \frac{-\text{अब}+\text{क}}{\text{२ब}}. \end{aligned}\right.$

३९. $\left.\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}+\text{२}}{\text{य}} &= \frac{\text{७}}{\text{८}}. \\ \frac{\text{क्ष}}{\text{य}-\text{२}} &= \frac{\text{५}}{\text{६}}. \end{aligned}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{५}. \\ \text{य} &= \text{८}. \end{aligned}\right.$

४०. $\left.\begin{aligned} \frac{\text{म}}{\text{क्ष}} + \frac{\text{न}}{\text{य}} &= \text{अ}. \\ \frac{\text{न}}{\text{क्ष}} + \frac{\text{म}}{\text{य}} &= \text{ब}. \end{aligned}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{aligned} \text{क्ष} &= \frac{\text{म}^{\text{२}}-\text{न}^{\text{२}}}{\text{मअ}-\text{नब}}. \\ \text{य} &= \frac{\text{म}^{\text{२}}-\text{न}^{\text{२}}}{\text{मब}-\text{नअ}}. \end{aligned}\right.$

४१. $\left.\begin{aligned} (\text{क्ष}+\text{१})(\text{य}-\text{९}) &= (\text{य}+\text{७})(\text{क्ष}+\text{५}) - \text{११२}. \\ \text{३य} - \text{२क्ष} &= \text{९}. \end{aligned}\right\}$

उत्तर. $\left\{\begin{aligned} \text{क्ष} &= \text{३}. \\ \text{य} &= \text{५}. \end{aligned}\right.$

४२. $\left.\begin{array}{l} य + \dfrac{क्ष}{४} = १० - \dfrac{य - २क्ष - १}{३}. \\ \dfrac{२क्ष - १}{१०} - \dfrac{६क्ष - २य}{५} = \dfrac{क्ष - य}{१०}. \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ४. \\ य = ९. \end{array}\right.$

४३. $\left.\begin{array}{l} ३\cdot४क्ष - \cdot०२य = \cdot०१. \\ २क्ष + \cdot४य = १\cdot२. \end{array}\right\}$ उत्तर $\left\{\begin{array}{l} क्ष = \cdot०२. \\ य = २\cdot९. \end{array}\right.$

४४. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{क्ष + अय}{३} = क. \\ अक्ष - बय = क. \end{array}\right\}$ उत्तर $\left\{\begin{array}{l} क्ष = \dfrac{(अ + ३ब)क}{अ^२ + ब}. \\ य = \dfrac{(३अ - १)क}{अ^२ + ब}. \end{array}\right.$

४५. $\left.\begin{array}{l} अक्ष + बय = क^२. \\ अ(अ + क्ष) = ब(ब + य) \end{array}\right\}$ उ० $\left\{\begin{array}{l} क्ष = \dfrac{ब^२ + क^२ - अ^२}{२अ}. \\ य = \dfrac{अ^२ + क^२ - ब^२}{२ब}. \end{array}\right.$

४६. $\left.\begin{array}{l} २क्ष - २य + ३ज्ञ = १६. \\ ३क्ष + ५य - २ज्ञ = ६. \\ ४क्ष + ३य - ४ज्ञ = -१. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = ३. \\ य = १. \\ ज्ञ = ४. \end{array}\right.$

४७. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{क्ष}{२} + \dfrac{य}{३} + \dfrac{ज्ञ}{४} = ६२. \\ \dfrac{क्ष}{३} + \dfrac{य}{४} + \dfrac{ज्ञ}{५} = ४७. \\ \dfrac{क्ष}{४} + \dfrac{य}{५} + \dfrac{ज्ञ}{६} = ३८. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष = २४. \\ य = ६०. \\ ज्ञ = १२०. \end{array}\right.$

४८. $\frac{क्ष+य}{ज्ञ}=५.$ $\frac{य-ज्ञ}{क्ष}=१.$ $\frac{क्ष-ज्ञ}{य}=\frac{१}{३}.$ उत्तर. { क्ष = ४. य = ६. ज्ञ = २.

४९. क्षयज्ञ = ४०. क्षयह = ८०. यज्ञह = २००. क्षज्ञह = १००. उत्तर. { क्ष = २. य = ४. ज्ञ = ५. ह = १०.

प्रश्न.

१. अशी कोणती संख्या आहे कीं, जिचे दुपटींत ९ मिळविले असतां, त्या बेरजेचें वर्गमूळ ५ होईल.

उत्तर. ८

२. अशी संख्या काढ कीं, जिचे पांचपटींत ४ मिळविले असतां, त्या बेरजेचें वर्गमूळ त्याच संख्येच्या तिपटीचे वर्गमूळाहून दोन ह्यांनीं अधिक होईल. उत्तर. १२.

३. अशी संख्या काढ, कीं जिचे वर्गांतून ७ वजा करून जी बाकी राहील, तिचें वर्गमूळ वजी संख्या ७ तांत वजा

करून जी बाकी राहील ती, हीं बरोबर होतील. उत्तर. ४.

४. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ५६ होईल, आणि वजाबाकी २४ होईल. उत्तर ४० आणि १६.

५. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज १६ होईल, आणि ज्यांचे व्युत्क्रमांची बेरीज त्याच व्युत्क्रमांचे वजाबाकीचे दुपटीबरोबर होईल.

उत्तर. ४ आणि १२.

६ समुद्रावरील एका लढाईत आरमाराचा $\frac{१}{३}$ शत्रूनें घेतला, $\frac{१}{६}$ समुद्रांत बुडविला, आणि दोन जहाजें जाळलीं. लढाई झाल्यानंतर जीं जहाजें राहिलीं, त्यांचा $\frac{१}{७}$ तुफानांत गमावला. आणि शेवटीं २४ जहाजें राहिलीं, तर प्रथमतः जहाजें किती होतीं?

उत्तर ६०.

७ दोन पुरुषांचीं वयें ३ : ४ ह्या प्रमाणांत आहेत, परंतु १० वर्षांपूर्वीं त्यांचीं वयें २ : ३ ह्या प्रमाणांत होतीं; तर त्यांचीं वयें काय आहेत?

उत्तर. २० आणि ४०.

८. एका दारूविक्यानें ९ शिलिंग दराचे २० शेर आणि ११ शिलिंग दराचे ३६ शेर एकत्र केले, आणि त्यास पुढें

असें वाटूं लागलें कीं, त्या मिश्रणांत १४ शिलिंग दराचे दारूचे कांहीं शेर मिळवावे, अशा रीतीनें कीं जेणेंकरून त्या मिश्रणाचा दर १२ शिलिंग होईल; तर त्यानें तिसरे प्रकारचे दारूचे किती शेर मिळवावे?

उत्तर. ४८ शेर.

९ एका कुणब्यानें एका व्यापाऱ्यापासून २९ पौंडांस १२ मेंढरें आणि २० कोंकरें विकत घेतलीं, आणि दुसऱ्या एकापासून त्याच दरानें ३३ पौंड १० शिलिंग ह्यांस १० मेंढरें आणि ३० कोंकरें विकत घेतलीं; तर एकेकाची किंमत काय होती?

उत्तर. मेंढराची २५ शिलिंग, आणि कोंकराची १४ शि.

१० अ आणि ब ह्या दोन व्यापाऱ्यांनीं ८३३ पौंड भांडवल व्यापारांत घातलें; कांहीं दिवसपर्यंत चांगला व्यापार करून, त्यांस निक्का नफा १५३ पौंड झाला, व त्यापैकीं ब स अ पेक्षां ४५ पौंड जाजती मिळालें; तर त्या भांडवलांत प्रत्येकाचा पैसा किती किती होता?

उत्तर. अ २९४ पौंड, आणि ब ५३९ पौंड.

११. जर एका शेतकऱ्यास दाहा दाहा मेंढरांस एकेक एकर जमीन नांगरावी लागते, आणि चार चार मेंढरांस

एकेक एकर जमीन चारणीकरितां घ्यावी लागते; तर ह्याप्रमाणानें ज्या कुणब्याकडे ७०० एकर जमीन आहे तो किती मेंढरें पाळीत असेल?

उत्तर. २०० मेंढरें.

१२. अशी कोणती संख्या आहे, कीं तीस १, ७, आणि १३ हे अंक वेगळे वेगळे मिळविले, तर पहिली बेरीज जशी दुसरे बेरजेस, तशी दुसरी बेरीज तिसरे बेरजेस होईल. उत्तर. २

१३. असा एक अपूर्णांक कोणता, कीं त्याचे अंशांत त्याचा छेद मिळविला तर ती बेरीज अंशांचे पांचपटीबरोबर होईल, आणि त्याचे अंशांत एक मिळविला तर त्याची किंमत $\frac{1}{2}$ होईल. उत्तर. $\frac{1}{2}$

१४. अ, क ठिकाणाहून ड ठिकाणाकडे जाण्यास निघाला आणि त्याचवेळेस ब, ड हून क कडे यावयास निघाला; त्यांची वाटेनें गांठ पडल्यावर अ, ड येथें अ तासांत पोहोंचला, आणि ब, क येथें ब तासांत पोहोंचला; तर एकेकाला तें सगळें अंतर चालावयास किती तास लागले?

उत्तर. अ, $अ^{\frac{1}{2}}(अ^{\frac{1}{2}}+ब^{\frac{1}{2}})$; आणि ब, $ब^{\frac{1}{2}}(अ^{\frac{1}{2}}+ब^{\frac{1}{2}})$.

१५ एके कलालाजवळ दोन प्रकारची दारू होती, एक २० आणे शेराच्या दराची होती, आणि दुसरी १२ आणे शेराच्या दराची होती. मग त्यानें दोन्ही मिळवून १४ आणे शेराच्या दराचें एक शेर मिश्रण केलें, तर त्यानें त्यांत एकेक प्रकारची दारू किती किती मिळविली?

उत्तर. पहिलीचा $\frac{१}{४}$ शेर; आणि दुसरीचे $\frac{३}{४}$ शेर.

१६ दोन आंकड्यांची अशी एक संख्या काढ, कीं ज्या आंकड्यांचे बेरजेची पांच पट त्या संख्येबरोबर होईल, आणि त्या संख्येंत ९ मिळविले असतां जी एकंदर बेरीज येईल तींत त्या आंकड्यांची व्युत्क्रमस्थिति होईल.

उत्तर. ४५.

१७. एका मनुष्यानें खेळतां खेळतां, आपल्या बरोबर जितकें द्रव्य आणिलें होतें त्याचे दुप्पट जिंकिलें, नंतर १६ शिलिंग गमाविलें, पुढें त्यानें खेळ चालला असतां बाकी जो त्याजवळ पैसा राहिला होता त्याचे $\frac{४}{५}$ गमावले, नंतर मूळचे द्रव्या इतकें द्रव्य जिंकिलें, आणि मग तो आपलें द्रव्य मोजून पाहातो तों ८० शिलिंग भरलें; तर त्यानें किती द्रव्य घेऊन खेळावयास प्रारंभ केला?

उत्तर. ५२ शिलिंग.

१८. कांहीं एक काम अ, अ दिवसांत करितो, आणि तेंच काम ब, ब दिवसांत करितो; तर ते दोघे एकदम तें काम करूं लागले तर किती दिवसांत संपवितील?

उत्तर. $\frac{अब}{अ+ब}$ दिवस.

१९. एका व्यापाऱ्यानें तीन वर्षें पर्यंत दरसाल ५० पौंड खर्च करून आपला संसार केला, आणि जी जी बाकी राहात गेली तींत दर वर्षी तिचा $\frac{१}{३}$ भर घालीत गेला. नंतर तिसऱ्या वर्षाचे अंतीं तो आपलें द्रव्य मोजून पाहातो तों तें मुळच्या भांडवलाचें दुप्पट भरलें; तर त्याचें मुळचें भांडवल किती होतें?

उत्तर. ७४० पौंड.

२०. एक मनुष्य ऐन भरतीचे वेळेस एका तासाचे $\frac{३}{४}$ अंशांत ५ मैल लांब होडी नेतो, व जेव्हां भरतीचा जोर $\frac{१}{२}$ कमी होतो तेव्हां त्यास तितकेच मैल परत यावयास $१\frac{१}{२}$ तास लागतो; तर जेव्हां भरतीचा वेग अत्यंत आहे तेव्हां पाणी एक तासांत किती लांब जातें?

उत्तर. एक तासांत $२\frac{२}{९}$ मैल.

२१. ११५२० ह्या संख्येचे असे तीन भाग कर, कीं पहिल्या आणि दुसऱ्या भागांच्या बेरजेची नऊपट, दुसऱ्या

आणि तिसऱ्या भागांच्या बेरजेच्या सातपटीबरोबर होईल; आणि पहिला भाग दुसरे भागांतून वजा करून जी बाकी राहील तिची आठपट, पहिल्या आणि तिसऱ्या भागांचे बेरजेबरोबर होईल.

उत्तर. २८८०, ३८४०, आणि ४८००.

२२ एका मनुष्यानें १४ पौंडांस कांहीं मेंढरें विकत घेतलीं, पुढें त्यांपैकीं ७ देऊन टाकून बाकीच्या मेंढरांचा ⅚ पहिल्या दराप्रमाणेंच २० पौंडास विकला; तर त्यानें मुळीं किती मेंढरें घेतलीं होतीं?

उत्तर. ४७ मेंढरें.

२३. एका शेतकऱ्यानें कांहीं खंडी गहूं व कांहीं खंडी हरबरे साऱ्याबद्दल देण्याचा करार करून जमीनदारापासून एक शेत घेतलें; जेव्हां गहूं ५५ रुपयेखंडी होते व हरबरे ३२ रुपयेखंडी होते, तेव्हां जमीनदारास गव्हांचा आणि हरबऱ्यांचा साऱ्याचा पैसा पोहोंचला; परंतु जेव्हां गहूं ६५ रुपये खंडी आणि हरबरे ४१ रुपये खंडी झाले, तेव्हां जमीनदारास १४० रुपये जास्त मिळूं लागले; तर किती खंडी गहूं व किती खंडी हरबरे देण्याचा त्याचा करार होता?

उत्तर. ६ खंडी गहूं, आणि १० खंडी हरबरे

२४. एका गाडीच्या पुढल्या चाकाचा परीघ अ फूट आहे आणि मागल्या चाकाचा ब फूट आहे; आतां मागल्या चाकाच्यापेक्षां पुढल्या चाकाच्या न प्रदक्षिणा जाजती झाल्या आहेत, तर पुढलें चाक आणि मागलें चाक ह्यांचेमधील अंतर हिशेबांत न घेतां ती गाडी किती लांब गेली असावी?

उत्तर. $\frac{अबन}{ब-अ}$ फूट.

प्रकरण ४.

वर्गसमीकरणें.

(१६). ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा दुसरा घात म्हणजे वर्ग असतो त्यास **वर्गसमीकरण** म्हणतात. ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा **वर्ग** मात्र असतो त्यास एकाकी वर्गसमीकरण म्हणतात; परंतु ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा **वर्ग** आणि **प्रथम घात** हे असतात त्यास **संयुक्त** वर्गसमीकरण म्हणतात. जसें, $क्ष^{2}=४$, आणि $अय^{2}-अ=ब$,

हीं एकाकी वर्गसमीकरणें आहेत; आणि क्ष + २ क्ष = ८, आणि $\text{य}^2 - \text{अय} = \text{स}$, हीं संयुक्तवर्गसमीकरणें आहेत.

उदाहरण १. $७\text{क्ष}^2 + १८ = ४\text{क्ष}^2 + ४५०$ ह्या एकाकी वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काढ.

स्थळांतरानें, $७\text{क्ष}^2 - ४\text{क्ष}^2 = ४५० - १८$,

म्हणजे $३\text{क्ष}^2 = ४३२$,

$\therefore \text{क्ष}^2 = \frac{४३२}{३} = १४४$.

आणि प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$\text{क्ष} = \pm १२$.

$\because +१२ \times +१२ = १४४$, आणि $-१२ \times -१२ = १४४$.

∴ क्ष च्या किंमतीस ± चिन्ह लावलें आहे.

हीं पुढील एकाकी वर्गसमीकरणें सोडीव.

१. $\text{क्ष}^2 = १४४$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm १२$.

२. $\text{क्ष}^2 - ९ = १६$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm ५$.

३. $\frac{३\text{क्ष}^2}{४} - ५ = ७$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm ४$.

४. $२\sqrt{१ - \text{क्ष}^2} = \sqrt{३}$. उत्तर. $\text{क्ष} = \pm \frac{१}{२}$.

५. $\frac{\sqrt{\text{अ}^2 + \text{क्ष}^2} - \text{क्ष}}{\text{क्ष}} = \frac{१}{\text{ब}}$ उत्तर. $\text{क्ष} = \pm \frac{\text{अब}}{\sqrt{२\text{ब} + १}}$.

६. $\frac{७क्ष^२}{४} - \frac{४क्ष^२+५}{२} + \frac{२क्ष^२-१५}{४} = ०.$

उत्तर. $क्ष = \pm ५.$

७. $\frac{१}{२क्ष^२} + ७ = \frac{९}{४क्ष^२}.$ उत्तर. $क्ष = \pm \frac{१}{२}$

८. $३५ - \frac{क्ष^२+५०}{५} = क्ष^२ - \frac{क्ष^२-१०}{२}.$

उत्तर. $क्ष = \pm ५.$

संयुक्त वर्गसमीकरणें.

(१७). कोणत्याही संयुक्तसमीकरणास $क्ष^२ + पक्ष = क$, असें रूप देतां येईल. ह्यांत प आणि क हीं अक्षरें व्यक्त पदें किंवा संख्या दाखवितात. आणि ह्या समीकरणाच्या प्रत्येक बाजूंत $\overline{\frac{प}{२}}|^२$ हें पद मिळविलें तर,

$$क्ष^२ + पक्ष + \overline{\frac{प}{२}}|^२ = क + \overline{\frac{प}{२}}|^२;$$

प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$$क्ष + \frac{प}{२} = \pm\sqrt{\frac{प^२}{४} + क}\,;\ \therefore क्ष = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + क}.$$

ह्यावरून संयुक्तवर्गसमीकरणें सोडविण्याचा हा नियम सिद्ध होतो, कीं दुसऱ्या पदाच्या वेळाप्रकाशकाच्या अर्धाचा वर्ग करून तो प्रत्येक बाजूंत मिळवावा, आणि मग प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढावें.

उदाहरणें.

१. $\text{क्ष}^{२} + ८\text{क्ष} = २०$, वर्ग पुरा कर.

$$\text{क्ष}^{२} + ८\text{क्ष} + ४^{२} = २० + १६ = ३६,$$ वर्गमूळ काढ.

$$\text{क्ष} + ४ = \pm ६,$$

$$\therefore \text{क्ष} = \pm ६ - ४ = +६ - ४, \text{ किंवा } -६ - ४ = २, \text{ किंवा } -१०.$$

२. $\text{क्ष}^{२} - ५\text{क्ष} = ६$, वर्ग पुरा कर.

$$\text{क्ष}^{२} - ५\text{क्ष} + \left(\frac{५}{२}\right)^{२} = ६ + \frac{२५}{४} = \frac{२४}{४} + \frac{२५}{४} = \frac{४९}{४},$$ वर्गमूळ काढ.

$$\text{क्ष} - \frac{५}{२} = \pm \frac{७}{२},$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{५ \pm ७}{२} = \frac{१२}{२}, \text{ किंवा } -\frac{२}{२} = ६, \text{ किंवा } -१.$$

ह्या उदाहरणांवरून असें दिसतें, कीं पहिल्या बाजूचें वर्गमूळ काढण्याची सुलभ रीति म्हटली म्हणजे हीच आहे कीं पहिल्या पदाचें आणि तिसऱ्या पदाचें वर्गमूळ काढावें, आणि त्या दोन्ही वर्गमूळांच्या मध्यें दुसऱ्या पदाचें चिन्ह मांडावें.

ह्यावरूनच हें ही दिसतें, कीं वर्गसमीकरणांत अव्यक्त पदास दोन मूळें म्हणजे दोन किंमती असतात.

$\text{क्ष}^{२} + \text{प}\text{क्ष} - \text{क} = ०$, ह्या समीकरणाचीं दोन मूळें दाखविण्यास अ आणि ब हीं अक्षरें घेतलीं, तर

$$\text{अ} = -\frac{\text{प}}{२} + \sqrt{\frac{\text{प}^{२}}{४} + \text{क}}, \quad \text{ब} = -\frac{\text{प}}{२} - \sqrt{\frac{\text{प}^{२}}{४} + \text{क}}.$$

$$\therefore अ+ब=-प,\ अब=-\frac{प^२}{४}-\left(\frac{प^२}{४}+क\right);$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं दोन्ही मुळांची बेरीज दुसऱ्या पदाच्या वेळाप्रकाशकाचें चिन्ह बदलून जो वेळाप्रकाशक, त्या बरोबर असते, आणि मुळांचा गुणाकार शेवटल्या पदाबरोबर असतो. हे सिद्धान्त सर्वप्रकारच्या घाताच्या समीकरणास लागू आहेत.

जेव्हां $\sqrt{\frac{प^२}{४}+क}=०$, तेव्हां मात्र वरली मुळें एकमेकाबरोबर असतात. कारण, असे झाल्याने $अ=-\frac{प}{२}$ आणि $ब=-\frac{प}{२}$

जेव्हां कचे चिन्ह धन आहे तेव्हां ही दोन्ही मुळें वास्तविक आहेत, परन्तु जेव्हां कचें चिन्ह ऋण आहे आणि जर $\frac{प^२}{४}>क$, तर मात्र तीं मुळें वास्तविक आहेत; कारण, जर $\frac{प^२}{४}<क$ आणि क पद ऋण आहे तर, $\frac{प^२}{४}-क$ हें ही पद ऋण होईल, आणि ऋणपदाचें वर्गमूळ नाहीं, म्हणून $\sqrt{\frac{प^२}{४}-क}$ हें केवळ कल्पित पद होईल.

$अक्ष^{२न}+बक्ष^{न}=क$, असल्या रूपांचीं समीकरणें म्हणजे ज्या समीकरणांच्या पहिल्या पदांतील अव्यक्तपदाचा घात दुसऱ्या पदांतील अव्यक्तपदा-

च्या घाताच्या दुप्पट असतो तीं समीकरणें संयुक्तवर्ग समीकरणांच्या रीतीनेंच सोडवतां येतात

उदाहरणें.

१ $क्ष^४ - ७ क्ष^२ = ८$, वर्ग पुरा कर.

$क्ष^४ - ७ क्ष^२ + \left(\frac{७}{२}\right)^२ = ८ + \frac{४९}{४} = \frac{३२}{४} + \frac{४९}{४} = \frac{८१}{४}$, वर्गमूळ काढ.

$क्ष^२ - \frac{७}{२} = \pm \frac{९}{२}$, $क्ष^२ = \frac{+७ \pm ९}{२} = \frac{१६}{२}$, किंवा $-\frac{२}{२} = ८$, किंवा -१.

$\therefore क्ष = \pm \sqrt{८}$ किंवा $\pm \sqrt{-१} = \pm २\sqrt{२}$, किंवा $\pm \sqrt{-१}$.

हें चतुर्घात समीकरण आहे, म्हणून ह्यास जीं चार मुळें असतात तीं, $+२\sqrt{२}$, $-२\sqrt{२}$, $+\sqrt{-१}$, आणि $-\sqrt{-१}$, हीं आहेत; ह्यांपैकीं पहिलीं दोन मुळें वास्तविक आहेत, आणि बाकीचीं दोन कल्पित आहेत.

२. $\frac{१}{३}\sqrt{क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}} + \frac{२ क्ष^२ + क्ष}{४} = \frac{६३}{४}$.

$\frac{१}{३}\sqrt{क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}} + \frac{क्ष^२}{२} + \frac{क्ष}{४} = \frac{६३}{४}$, दोहोंनीं गूण.

$\frac{२}{३}\sqrt{क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}} + क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} = \frac{६३}{२}$, प्रत्येक बाजूंत $\frac{१७}{२}$ मिळीव,

$क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२} + \frac{२}{३}\sqrt{क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}} = ४०$,

आतां $\because \left(क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}\right)$ हा $\sqrt{क्ष^२ + \frac{क्ष}{२} + \frac{१७}{२}}$ ह्याचा

वर्ग आहे, ∴ ह्या समीकरणास संयुक्तसमीकरणाचें रूप आलें, आणि म्हणून वर्ग पुरा केल्यानें :

$$\left(क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}\right)+\frac{२}{३}\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\overline{\frac{१}{३}}\Big|^{२}=\frac{३६१}{९},$$

$$\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}+\frac{१}{३}=\pm\frac{१९}{३},$$

$$\sqrt{क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}}=\frac{\pm१९-१}{३}=\frac{१८}{३}=६,\ किंवा -\frac{२०}{३};$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचे वर्ग केल्यानें,

$$क्ष^{२}+\frac{क्ष}{२}+\frac{१७}{२}=३६,\ किंवा\ \frac{४००}{९};$$

प्रथमतः ३६ ही किंमत धरल्यानें,

$$क्ष^{२}+\frac{१}{२}क्ष=३६-\frac{१७}{२}=\frac{७२-१७}{२}=\frac{५५}{२},$$

$$\overline{क्ष^{२}+\frac{१}{२}क्ष+\frac{१}{४}}\Big|^{२}=\frac{५५}{२}+\frac{१}{१६}=\frac{४४०}{१६}+\frac{१}{१६}=\frac{४४१}{१६}$$

$$क्ष+\frac{१}{४}=\pm\frac{२१}{४},$$

$$\therefore\ क्ष=\frac{\pm२१-१}{४}=\frac{२०}{४},\ किंवा -\frac{२२}{४}=५,\ किंवा -\frac{११}{२}.$$

पुनः $\frac{४००}{९}$ ही किंमत धरल्यानें,

$$क्ष^{२}+\frac{१}{२}क्ष=\frac{४००}{९}-\frac{१७}{२}=\frac{८००-१५३}{१८}=\frac{६४७}{१८},$$

$$क्ष^{२} + \frac{१}{२}क्ष + \overline{\frac{१}{४}}^{२} = \frac{५४७}{१८} + \frac{१}{१६} = \frac{५१७६}{१४४} + \frac{९}{१४४} = \frac{५१८५}{१४४},$$

$$क्ष + \frac{१}{४} = \pm\sqrt{\frac{५१८५}{१२}},\ \therefore क्ष = -\frac{१}{४} \pm \sqrt{\frac{५१८५}{१२}}.$$

ह्याकरितां $क्ष = ५$, किंवा $-\frac{११}{२}$, किंवा $\frac{-३ \pm \sqrt{५१८५}}{१२}$.

३. $क्ष^{३} - २क्ष = २$, क्षनें गूण.

$$क्ष^{४} - २क्ष^{२} = २क्ष,\ क्ष^{४} - २क्ष^{२} = क्ष^{२} + २क्ष.$$

$$क्ष^{४} - २क्ष^{२} + १ = क्ष^{२} + २क्ष + १.$$

$$क्ष^{२} - १ = क्ष + १,\ क्ष^{२} - क्ष = २,$$

$$क्ष^{२} - क्ष + \overline{\frac{१}{२}}^{२} = २ + \frac{१}{४} = \frac{९}{४},\ क्ष - \frac{१}{२} = \pm\frac{३}{२},$$

$$क्ष = \frac{१ \pm ३}{२} = \frac{४}{२},\ किंवा\ -\frac{२}{२} = २,\ किंवा\ -१.$$

४. $क्ष^{३} - २क्ष = ४$, क्षानें गूण.

$क्ष^{४} - २क्ष^{२} = ४क्ष$, प्रत्येक बाजूंत $४क्ष^{२}$ मिळीव

$$क्ष^{४} + २क्ष^{२} = ४क्ष^{२} + ४क्ष,$$

$$क्ष^{४} + २क्ष^{२} + १ = ४क्ष^{२} + ४क्ष + १,$$

$$क्ष^{२} + १ = \pm(२क्ष + १),\ क्ष^{२} = २क्ष,\ \therefore क्ष = २.$$

पुनः $क्ष^{२} + १ = -२क्ष - १$, $क्ष^{२} + २क्ष + १ = -१$,

$$क्ष + १ = \pm\sqrt{-१},\ \therefore क्ष = १ \pm \sqrt{-१}.$$

५. $(\text{क्ष}^2-५)^2=(\text{क्ष}-३)^2+(\text{क्ष}+१)^2$.

$\text{क्ष}^4-१०\text{क्ष}^2+२५=\text{क्ष}^2-६\text{क्ष}+९+\text{क्ष}^2+२\text{क्ष}+१$,

$\text{क्ष}^4-१२\text{क्ष}^2+४\text{क्ष}+१५=०$,

$\text{क्ष}^4-८\text{क्ष}^2=४\text{क्ष}^2-४\text{क्ष}-१५$,

$\text{क्ष}^4-८\text{क्ष}^2+१६=४\text{क्ष}^2-४\text{क्ष}+१$.

$\text{क्ष}^2-४=\pm(२\text{क्ष}-१)$, $\text{क्ष}^2-२\text{क्ष}=३$,

$\text{क्ष}^2-२\text{क्ष}+१=४$, $\text{क्ष}-१=\pm २$.

$\therefore \text{क्ष}=१\pm २=३$, किंवा -१.

पुनः $\text{क्ष}^2-४=-२\text{क्ष}+१$, $\text{क्ष}^2+२\text{क्ष}=५$,

$\text{क्ष}^2+२\text{क्ष}+१=६$, $\text{क्ष}+१=\pm\sqrt{६}$

$\therefore \text{क्ष}=\pm\sqrt{६}-१$.

६. $\text{क्ष}^3-\text{क्ष}^2=४$. ४ ह्यांनी गूण.

$४\text{क्ष}^3=४\text{क्ष}^2+१६$, प्रत्येक बाजूंत $\text{क्ष}^4+४\text{क्ष}^2$ हे मिळीव.

$\text{क्ष}^4+४\text{क्ष}^3+४\text{क्ष}^2=\text{क्ष}^4+८\text{क्ष}^2+१६$, वर्गमूळ काढ.

$\text{क्ष}^2+२\text{क्ष}=\text{क्ष}^2+४$,

$२\text{क्ष}=४$, $\therefore \text{क्ष}=२$.

७. $(\text{क्ष}-१)\sqrt{२\text{क्ष}-\text{क्ष}^2}=\frac{१}{२}$, वर्ग कर.

$(\text{क्ष}^2-२\text{क्ष}+१)(२\text{क्ष}-\text{क्ष}^2)=\frac{१}{४}$,

$-\text{क्ष}^4+४\text{क्ष}^3-५\text{क्ष}^2+२\text{क्ष}=\frac{१}{४}$,

$$४\text{क्ष}^४ - १६\text{क्ष}^३ + २०\text{क्ष}^२ - ८\text{क्ष} = -१,$$

$$(२\text{क्ष}^२ - ४\text{क्ष})^२ + २(२\text{क्ष}^२ - ४\text{क्ष}) + १ = ०,$$ वर्गमूळ काढ.

$$२\text{क्ष}^२ - ४\text{क्ष} + १ = ०, \quad \text{क्ष}^२ - २\text{क्ष} = -\frac{१}{२},$$

$$\text{क्ष}^२ - २\text{क्ष} + १ = १ - \frac{१}{२} = \frac{१}{२}, \quad \text{क्ष} - १ = \pm\frac{१}{\sqrt{२}},$$

$$\therefore \text{क्ष} = १ \pm \frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२} \pm १}{\sqrt{२}}.$$

८. $\text{क्ष} - २\sqrt{\text{क्ष}+२} = १ + \sqrt[४]{\text{क्ष}^३ - ३\text{क्ष} + २}.$

$$(\text{क्ष} - १) - २\sqrt{\text{क्ष}+२} = \sqrt[४]{(\text{क्ष}-१)^२(\text{क्ष}+२)}$$

$$= \sqrt{\text{क्ष}-१}\,.\,\sqrt[४]{\text{क्ष}+२},$$

$$(\text{क्ष}-१) - \sqrt{\text{क्ष}-१}\,.\,\sqrt[४]{\text{क्ष}+२} = २\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$(\text{क्ष}-१) - \sqrt[४]{\text{क्ष}+२}\,.\,\sqrt{\text{क्ष}-१} + \frac{१}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२} =$$

$$२\sqrt{\text{क्ष}+२} + \frac{१}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२} = \frac{९}{४}\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$\sqrt{\text{क्ष}-१} - \frac{१}{२}\sqrt[४]{\text{क्ष}+२} = \pm\frac{३}{२}\sqrt[४]{\text{क्ष}+२},$$

$$\sqrt{\text{क्ष}-१} = २\sqrt[४]{\text{क्ष}+२}, \quad \text{क्ष} - १ = ४\sqrt{\text{क्ष}+२},$$

$$\text{क्ष}^२ - २\text{क्ष} + १ = १६\text{क्ष} + ३२, \quad \text{क्ष}^२ - १८\text{क्ष} = ३१,$$

$$\text{क्ष}^२ - १८\text{क्ष} + ९^२ = ८१ + ३१ = ११२ = १६ \times ७,$$

$$\text{क्ष} - ९ = \pm ४\sqrt{७}, \quad \therefore \text{क्ष} = ९ \pm ४\sqrt{७}.$$

पुनः $\sqrt{\text{क्ष}-१} = -\sqrt[४]{\text{क्ष}+२},$

$$\text{क्ष}^२ - २\text{क्ष} + १ = \text{क्ष} + २, \quad \text{क्ष}^२ - ३\text{क्ष} = १,$$

$$क्ष^२ - ३क्ष + \left(\frac{३}{२}\right)^२ = १ + \frac{९}{४} = \frac{१३}{४}, \quad क्ष - \frac{३}{२} = \pm \frac{\sqrt{१३}}{२},$$

$$\therefore क्ष = \frac{३ \pm \sqrt{१३}}{२} = \frac{१}{२}(३ \pm \sqrt{१३}).$$

$$\sqrt{अ^२ - क्ष^२} + क्ष\sqrt{अ^२ - १} = अ^२\sqrt{१ - क्ष^२}.$$

$$अ^२ - क्ष^२ + क्ष^२(अ^२ - १) + २क्ष\{(अ^२ - क्ष^२)(अ^२ - १)\}^{\frac{१}{२}} = अ^४(१ - क्ष^२),$$

$$अ^२ - क्ष^२ + अ^२क्ष^२ - क्ष^२ + २क्ष(अ^४ - अ^२क्ष^२ - अ^२ + क्ष^२)^{\frac{१}{२}} = अ^४ - अ^४क्ष^२,$$

$$अ^४ - अ^२क्ष^२ - अ^२ + क्ष^२ - २क्ष\sqrt{अ^४ - अ^२क्ष^२ - अ^२ + क्ष^२} + क्ष^२ = अ^४क्ष^२.$$

$$\sqrt{अ^४ - अ^२क्ष^२ - अ^२ + क्ष^२} = अ^२क्ष + क्ष.$$

$$अ^४ - अ^२क्ष^२ - अ^२ + क्ष^२ = क्ष^२अ^४ + २अ^२क्ष^२ + क्ष^२,$$

$$अ^४ - अ^२ = अ^४क्ष^२ + ३अ^२क्ष^२, \quad अ^२ - १ = अ^२क्ष^२ + ३क्ष^२,$$

$$(अ^२ + ३)क्ष^२ = अ^२ - १, \quad क्ष^२ = \frac{अ^२ - १}{अ^२ + ३}, \quad \therefore क्ष = \left(\frac{अ^२ - १}{अ^२ + ३}\right)^{\frac{१}{२}}$$

१०. $$\sqrt{क्ष - \frac{१}{क्ष}} + \sqrt{१ - \frac{१}{क्ष}} = क्ष.$$

$$\sqrt{१ - \frac{१}{क्ष}} = क्ष - \sqrt{क्ष - \frac{१}{क्ष}},$$

$$१ - \frac{१}{क्ष} = क्ष^२ - २क्ष\sqrt{क्ष - \frac{१}{क्ष}} + क्ष - \frac{१}{क्ष},$$

$$क्ष^२ - १ - २क्ष\frac{\sqrt{क्ष^२ - १}}{\sqrt{क्ष}} + क्ष = ०,$$

$$\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{१} - \text{२}\,\text{क्ष}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\sqrt{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{१}} + \text{क्ष} = \text{०},$$

$$\sqrt{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{१}} - \text{क्ष}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}} = \text{०},\quad \sqrt{\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{१}} = \text{क्ष}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}},\quad \text{क्ष}^{\text{२}} - \text{१} = \text{क्ष},$$

$$\text{क्ष}^{\text{२}} - \text{क्ष} = \text{१},\quad \overline{\text{क्ष} - \frac{\text{१}}{\text{२}}}\,\Big|^{\text{२}} = \text{१} + \frac{\text{१}}{\text{४}} = \frac{\text{५}}{\text{४}},$$

$$\text{क्ष} - \frac{\text{१}}{\text{२}} = \pm\frac{\sqrt{\text{५}}}{\text{२}},\quad \therefore\ \text{क्ष} = \frac{\text{१} \pm \sqrt{\text{५}}}{\text{२}}.$$

११. $$\left(\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}}\right)^{\frac{\text{१}}{\text{४}}} + \sqrt{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}}\cdot\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{क्ष}}{\text{१}+\text{क्ष}}} = \text{२}\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}}.$$

$$\frac{\sqrt[\text{४}]{\text{१}+\text{क्ष}}}{\sqrt[\text{४}]{\text{१}-\text{क्ष}}} + \sqrt{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}}\cdot\frac{\sqrt[\text{४}]{\text{१}-\text{क्ष}}}{\sqrt[\text{४}]{\text{१}+\text{क्ष}}} = \text{२}\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}},$$

$$\frac{\sqrt{\text{१}+\text{क्ष}}}{\sqrt{\text{१}-\text{क्ष}}} + \sqrt{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}} = \text{२}\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}}\cdot\frac{\sqrt[\text{४}]{\text{१}+\text{क्ष}}}{\sqrt[\text{४}]{\text{१}-\text{क्ष}}},\quad \therefore \times \frac{\sqrt[\text{४}]{\text{१}+\text{क्ष}}}{\sqrt[\text{४}]{\text{१}-\text{क्ष}}}.$$

$$\sqrt{\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}}} - \text{२}\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}}\cdot\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}}} + \sqrt{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}} = \text{०},$$

$$\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}}} - \sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}} = \text{०},$$

$$\sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}}} = \sqrt[\text{४}]{\frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}}},$$

$$\frac{\text{१}+\text{क्ष}}{\text{१}-\text{क्ष}} = \frac{\text{१}-\text{अ}}{\text{१}+\text{अ}},\quad \therefore\ \text{क्ष} = -\text{अ}.$$

१२. $$\frac{\text{१}+\text{क्ष}^{\text{२}}}{(\text{१}+\text{क्ष})^{\text{२}}} = \frac{\text{१}}{\text{२}}.$$

$$\text{२}+\text{२}\,\text{क्ष}^{४}=\text{१}+\text{४}\,\text{क्ष}+\text{६}\,\text{क्ष}^{२}+\text{४}\,\text{क्ष}^{३}+\text{क्ष}^{४},$$

$$\text{क्ष}^{४}-\text{४}\,\text{क्ष}^{३}-\text{६}\,\text{क्ष}^{२}-\text{४}\,\text{क्ष}+\text{१}=\text{०},$$ $\text{क्ष}^{२}$ ह्यानें भाग.

$$\text{क्ष}^{२}-\text{४}\,\text{क्ष}-\text{६}-\frac{\text{४}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{२}}=\text{०},$$

$$\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{२}}-\text{४}\,\text{क्ष}-\frac{\text{४}}{\text{क्ष}}=\text{६},$$ प्रत्येक बाजूंन २ मिळीव.

$$\text{क्ष}^{२}+\text{२}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{२}}-\text{४}\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)=\text{८},$$

$$\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)^{२}-\text{४}\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)+\text{२}^{२}=\text{८}+\text{४}=\text{१२},$$

$$\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}-\text{२}=\pm\,\text{२}\sqrt{\text{३}},$$

$$\text{क्ष}^{२}+\text{१}-\text{२}\,\text{क्ष}=\pm\,\text{२}\sqrt{\text{३}}\cdot\text{क्ष},$$

$$\text{क्ष}^{२}-(\text{२}\pm\text{२}\sqrt{\text{३}})\,\text{क्ष}=-\text{१},$$

$$\text{क्ष}^{२}-\text{२}(\text{१}\pm\sqrt{\text{३}})\,\text{क्ष}+(\text{१}\pm\sqrt{\text{३}})^{२}=\text{१}\pm\text{२}\sqrt{\text{३}}+\text{३}-\text{१}$$
$$=\text{३}\pm\text{२}\sqrt{\text{३}},$$

$$\text{क्ष}-(\text{१}\pm\sqrt{\text{३}})=\pm\sqrt{\text{३}\pm\text{२}\sqrt{\text{३}}},$$

$$\therefore\ \text{क्ष}=\text{१}\pm\sqrt{\text{३}}\pm\sqrt{\text{३}\pm\text{२}\sqrt{\text{३}}}.$$

१२. $\text{२}\,\text{क्ष}^{३}-\text{क्ष}^{२}=\text{१}$, $\text{२}\,\text{क्ष}+\text{१}$ ह्यानें गूण.

$$\text{४}\,\text{क्ष}^{४}-\text{क्ष}^{२}=\text{२}\,\text{क्ष}+\text{१},\quad \text{४}\,\text{क्ष}^{४}=\text{क्ष}^{२}+\text{२}\,\text{क्ष}+\text{१},.$$

$$२क्ष^{२} = क्ष + १ , \quad क्ष^{२} - \frac{क्ष}{२} = \frac{१}{२} ,$$

$$क्ष^{२} - \frac{क्ष}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{८}{१६} + \frac{१}{१६} = \frac{९}{१६} .$$

$$क्ष - \frac{१}{४} = \pm \frac{३}{४} , \quad \therefore क्ष = \frac{१ \pm ३}{४} = १ , \text{ किंवा } - \frac{१}{२} .$$

$अक्ष^{२} \pm बक्ष^{२} = क$, ह्या प्रकारचें कोणतेंही समीकरण असल्यास त्यास ही रीति लागू पडेल; म्हणजे, अक्ष ∓ ब ह्यांनीं गुणून तें समीकरण सोडवितां येईल; येथें जेव्हां क्ष च्या वेळा प्रकाशकाचें चिन्ह धन असेल, तेव्हां वरील चिन्ह घ्यावें, आणि ऋण असेल तेव्हां खालचें चिन्ह घ्यावें.

परंतु ह्या रीतीनें समीकरणांत नवा गुणक शिरतो, ह्यास्तव त्या गुणकाची किंमत ० धरूं नये. कारण, ० किंमत धरली असतां क्षस जी किंमत येईल ती विवक्षित समीकरणांत जमणार नाहीं.

हीं पुढील संयुक्त वर्गसमीकरणें सोडीव.

१. $क्ष^{२} - ८क्ष = ९$, ह्यांत क्षच्या किंमती काढ.

उत्तर. क्ष = ९, किंवा −१.

२. $क्ष^{२} + १२क्ष - १६ = ९२$. उत्तर. क्ष = ६, किंवा −१८.

३. $क्ष^२ - ३क्ष = १०$. उत्तर. $क्ष = ५$, किंवा -२.

४. $क्ष^२ - क्ष + ३ = ४५$. उत्तर. $क्ष = ७$, किंवा -६.

५. $५क्ष^२ + क्ष = ४$. उत्तर. $क्ष = \frac{४}{५}$, किंवा -१.

६. $२क्ष^२ - क्ष = २१$. उत्तर. $क्ष = \frac{७}{२}$, किंवा -३.

७. $५क्ष^२ + ६क्ष = ६३$. उत्तर. $क्ष = ३$, किंवा $-\frac{२१}{५}$.

८. $क्ष - १ = -\frac{१}{क्ष}$. उत्तर. $क्ष = \frac{१ \pm \sqrt{-३}}{२}$.

९. $(क्ष - १२)(क्ष + २) = ०$. उत्तर. $क्ष = १२$, किंवा -२

१०. $३क्ष^२ - १४क्ष + १५ = ०$. उत्तर. $क्ष = ३$, किंवा $१\frac{२}{३}$.

११. $५क्ष^२ - ११क्ष = -१$. उत्तर. $क्ष = -७$, किंवा $-१\frac{१}{२}$

१२. $अक्ष^२ - बक्ष = क$. उत्तर. $क्ष = \frac{ब \pm \sqrt{(ब^२ + ४अक)}}{२अ}$

१३. $४क्ष - \frac{१४ - क्ष}{क्ष + १} = १४$. उत्तर. $क्ष = ४$ किंवा $-\frac{७}{४}$

१४. $क्ष^२ - ४अक्ष = -७अ^२$. उत्तर. $क्ष = (२ \pm \sqrt{-३})अ$

१५. $\frac{१०}{क्ष} - \frac{१४ - २क्ष}{क्ष^२} = \frac{२२}{९}$. उत्तर. $क्ष = ३$, किंवा $\frac{२१}{११}$

१६. $क्ष + \sqrt{५क्ष + १०} = ८$.[+] उत्तर. $क्ष = १८$, किंवा ३.

+ हें उदाहरण सोडवितांना $\sqrt{५क्ष+१०} = ५$, किंवा -१० येतात, ∴ १८ उत्तरानें ताळा पाहातांना $\sqrt{५क्ष+१०} = -१०$ घ्यावे, आणि ३ उत्तरानें ताळा पाहातांना $\sqrt{५क्ष+१०} = ५$ घ्यावे. हीच गोष्ट, पुढील कित्येक उदाहरणांचा ताळा पाहातांना, लक्षांत ठेवावी.

१७. $\frac{३क्ष+४}{५} - \frac{३०-२क्ष}{क्ष-६} = \frac{७क्ष-१४}{१०}$.

उत्तर. क्ष=३६, किंवा १२.

१८. $क्ष+\sqrt{१०क्ष+६} = ९$. उत्तर. क्ष=२५, किंवा ३.

१९. $(क्ष+२)^2 = २क्ष^2+८$. उत्तर. क्ष=२.

२०. $\frac{क्ष+२२}{३} - \frac{९क्ष-६}{२} = \frac{४}{क्ष}$.

उत्तर. क्ष=२, किंवा $\frac{१२}{२५}$.

२१. $\frac{२क्ष}{९} - २ = \frac{३क्ष-१६}{१८} - \frac{४क्ष-३}{४क्ष+३}$.

उत्तर. क्ष=६, किंवा $-४\frac{३}{४}$.

२२. $\frac{क्ष-३}{क्ष+५} - \frac{क्ष+४}{क्ष-७} = २\frac{७}{९}$.

उत्तर. क्ष=४, किंवा $८\frac{२१}{२५}$.

२३. $क्ष^2-(अ+ब)क्ष+अब = ०$.

उत्तर. क्ष=अ, किंवा ब.

२४. $४क्ष+४\sqrt{क्ष+२} = ७$.

उत्तर. क्ष=$४\frac{१}{४}$, किंवा $\frac{१}{४}$.

२५. $क्ष = \frac{क्ष-९}{क्ष^{\frac{१}{२}}+३} + १५.$

*उत्तर. $क्ष = \{(-३)^2 = ९\}$ किंवा $\{(+४)^2 = १६\}$

२६. $\sqrt{क्ष+६} + \sqrt{क्ष+३} = ३\sqrt{क्ष}$

उत्तर. $क्ष = \frac{९ \pm \sqrt{७६}}{५}$

२७. $\frac{\sqrt{४क्ष+२०}}{४+\sqrt{क्ष}} = \frac{४-\sqrt{क्ष}}{\sqrt{क्ष}}.$

उत्तर. $क्ष = ४$, किंवा $-\frac{६४}{३}.$

२८. $\sqrt{क्ष} + २ = \sqrt{७+२क्ष}$

उत्तर. $क्ष = ९$, किंवा १.

---

* ∵ $अ^2$ हा + अ चा किंवा − अ चा वर्ग आहे, हें जेव्हां माहीत नाहीं तेव्हां $अ^2$ ह्याचें वर्गमूळ ± अ घ्यावें, पण जेव्हां $अ^2$ हा + अ चा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हां $अ^2$ चें वर्गमूळ + अ घ्यावें आणि जेव्हां $अ^2$ हा − अ चा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हां $अ^2$ चें वर्गमूळ − अ घ्यावें; असेंच वरील उत्तरांत ९ आणि १६ हे अनुक्रमें −३ आणि +४ ह्यांचे वर्ग आहेत, म्हणून ९ आणि १६ ह्यांचीं वर्गमूळें −३ आणि +४ घ्यावीं. ह्या गोष्टीकडे लोक दुर्लक्ष्य करितात तें न करावें, म्हणून वरील उत्तरांत $(-३)^2 = ९$ आणि $(+४)^2 = १६$ असें लिहिलें आहे. हीच गोष्ट पुढील कित्येक उदाहरणांस लागू आहे.

२९. $\frac{क्ष}{क्ष+१} + \frac{क्ष+१}{क्ष} = २\frac{१}{६}$.

उत्तर. क्ष=२, किंवा −३.

३०. $\frac{४क्ष^२}{३} = \frac{क्ष}{३} + ११$. उत्तर. क्ष=३, किंवा $-२\frac{३}{४}$.

३१. $\sqrt{क्ष-अ} + \sqrt{क्ष+ब} = २\sqrt{क्ष}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{(अ+ब)^२}{८(ब-अ)}$.

३२. $\frac{\sqrt{अ^२क्ष+ब}}{अ+\sqrt{क्ष}} = \frac{अ-\sqrt{क्ष}}{\sqrt{क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{-(२अ^२+ब) \pm \sqrt{४अ^६+४अ^२ब+ब^२}}{२(अ^२-१)}$.

३३. $\frac{क्ष+४}{३} - \frac{४क्ष+७}{९} = \frac{७-क्ष}{क्ष-३} - १$.

उत्तर. क्ष=२१, किंवा ५.

३४. $\sqrt{५अ+क्ष} + \sqrt{५अ-क्ष} = \frac{१२अ}{\sqrt{५अ+क्ष}}$.

उत्तर. क्ष=४अ, किंवा ३अ.

३५. $क्ष^४ - ८क्ष^२ = ९$.

उत्तर. क्ष=±३, किंवा $\pm\sqrt{-१}$.

३६. $क्ष^{६} - ४ क्ष^{३} = ३२$.   उत्तर. $क्ष = २$. किंवा $\sqrt[३]{-४}$.

३७. $\frac{नक्ष + ब}{\sqrt{क्ष}} = \frac{नअ + ब}{\sqrt{अ}}$.

उत्तर. $क्ष = अ$, किंवा $\frac{ब^{२}}{अन^{२}}$.

३८. $क्ष^{४} - २ क्ष^{२} = ३$.   उत्तर. $क्ष = \pm\sqrt{३}$, किंवा $\pm\sqrt{-}$

३९. $\sqrt{४अ + क्ष} + \sqrt{अ + क्ष} = २\sqrt{२अ + क्ष}$.

उत्तर. $क्ष = -\frac{७}{८}अ$.

४० $क्ष^{३} - क्ष^{\frac{३}{२}} = ५६$.   उत्तर. $क्ष = ४$, किंवा $\sqrt[३]{४९}$

४१. $क्ष + ५ = \sqrt{क्ष + ५} + ६$.

उत्तर. $क्ष = ४$, किंवा -१.

४२. $\sqrt{(२क्ष + १)} + २\sqrt{क्ष} = \frac{२१}{\sqrt{(२क्ष + १)}}$

उत्तर. $क्ष = ४$, किंवा -२५.

४३. $क्ष^{६} + २० क्ष^{३} = ६९$.   उत्तर. $क्ष = \sqrt[३]{३}$, किंवा $\sqrt[३]{-२३}$

४४. $\frac{अ + क्ष}{\sqrt{अ - क्ष}} + \frac{अ - क्ष}{\sqrt{अ + क्ष}} = २\sqrt{अ}$.

उत्तर. $क्ष = \pm अ\sqrt{८\sqrt{२} - ११}$.

४५. $क्ष\sqrt{\frac{अ}{क्ष}-१} = \sqrt{क्ष^२-ब^२}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{४}(अ \pm \sqrt{अ^२+८ब^२})$.

४६. $(अ+१)(क्ष-१)^२ = २(क्ष^२+१)$.

उत्तर. $क्ष = \frac{\sqrt{अ}+१}{\sqrt{अ}-१}$. किंवा $\frac{\sqrt{अ}-१}{\sqrt{अ}+१}$.

४७. $क्ष^२-७क्ष+\sqrt{क्ष^२-७क्ष+१८} = २४$.

उत्तर. $क्ष = ९$, किंवा -२, किंवा $\frac{७\pm\sqrt{१७३}}{२}$.

४८. $\left(\frac{१}{क्ष}\right)^३ + अ = \left(\frac{१}{क्ष}\right)^{\frac{३}{२}}$.

उत्तर. $क्ष = \left\{\frac{१\mp\sqrt{१-४अ}}{२अ}\right\}^{\frac{२}{३}}$.

४९. $५^{क्ष} + \frac{१२५}{५^{क्ष}} = ३०$. उत्तर $क्ष = २$, किंवा १.

५०. $\sqrt{अ-क्ष} + \sqrt{अ+क्ष} = \frac{ब}{\sqrt{अ+क्ष}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{२}(ब-अ\pm\sqrt{अ^२+२अब-ब^२})$

६४. $अक्ष + २\sqrt{न^२क्ष + नअक्ष^२} = (३क्ष - १)न.$

उत्तर. $क्ष = \frac{न}{न - अ}$, किंवा $\frac{न}{९न - अ}$.

६५. $२(\sqrt{१ - क्ष} + १) = \frac{क्ष}{\sqrt{१ + क्ष} - १}.$

उत्तर. $क्ष = \frac{२४}{२५}$, किंवा ०.

६६. $\left(क्ष - \frac{अब}{क्ष}\right)^२ = \frac{अ^२ + अब}{२} \cdot \left(\frac{अ^२}{क्ष^२} + १\right).$

उत्तर. $क्ष = \sqrt{अ^२ + २अब}$, किंवा $\sqrt{अब - अ^२}$.

६७. $(क्ष - ब)^{२न} + २ब^नक्ष = ब^{न+१}(२ + ब^{न-१}) + २(क्ष - ब)^{न+१}$

उत्तर. $क्ष = २ब$.

६८. $क्ष^४ = -१.$

उत्तर. $क्ष = \sqrt[४]{-१}$, किंवा $\frac{\pm १ \pm \sqrt{-१}}{\sqrt{२}}$

६९. $क्ष^{४न} - २क्ष^{३न} + क्ष^न = ६.$

उत्तर. $क्ष = \sqrt[न]{\frac{१}{२} \pm \frac{१}{२}\sqrt{१३}}$, किंवा $\sqrt[न]{\frac{१}{२} \pm \frac{१}{२}\sqrt{-७}}$

७०. $\left\{(क्ष - २)^२ - क्ष\right\}^२ - १० + क्ष = (क्ष - २)^२.$

उत्तर. $क्ष = ६$, किंवा -१, किंवा $\frac{५ \pm ३\sqrt{-३}}{२}$.

७१. $\sqrt[म]{(१+क्ष)^{२}} - \sqrt[म]{(१-क्ष)^{२}} = \sqrt[म]{१-क्ष^{२}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{(१\pm\sqrt{५})^{म} - २^{म}}{(१\pm\sqrt{५})^{म} + २^{म}}$.

७२. $८क्ष^{४} + ४क्ष^{३} - १८क्ष^{२} + ११क्ष - २ = ०$.

उत्तर. $क्ष = \frac{१}{२}$, किंवा -२.

७३. $४क्ष^{२} - २० - ५\left(क्ष + \frac{३}{क्ष}\right) = -\frac{३६}{क्ष^{२}}$.

उत्तर. $क्ष = ३, १$, किंवा $\frac{-११ \pm \sqrt{-७१}}{८}$.

७४. $\frac{१}{(क्ष-४)^{\frac{१}{२}}} + \frac{(क्ष-४)^{\frac{३}{२}}}{२} = \frac{१७}{४(क्ष-४)^{\frac{१}{२}}}$.

उत्तर. $क्ष = १२$, किंवा $४\frac{१}{२}$.

७५. $क्ष^{४} + ४क्ष^{३} + ३क्ष^{२} + ४क्ष + १ = ०$.

उत्तर. $क्ष = \frac{-२ \pm \sqrt{३} \pm \sqrt{(३ \mp ४\sqrt{३})}}{२}$

७६. $(अ^{२म}+१)(क्ष^{\frac{१}{२}}-१)^{२} = २(क्ष+१)$.

उत्तर. $क्ष = \left(\frac{अ^{म} \pm १}{अ^{म} \mp १}\right)^{२}$.

७७. $(क्ष^2 - ९)^2 - ३ = ११(क्ष^2 - २)$

उत्तर. $क्ष = \pm ५$, किंवा ± २

७८. $\sqrt{क्ष + \sqrt{२क्ष - १}} - \sqrt{क्ष - \sqrt{२क्ष - १}} = \frac{३}{५}\sqrt{क्ष + \frac{१०क्ष}{\sqrt{२क्ष -}}}$

उत्तर $क्ष = \frac{५}{२}$. किंवा $\frac{५}{८}$

७९. $\frac{अ - \sqrt{२अक्ष - क्ष^2}}{अ + \sqrt{२अक्ष - क्ष^2}} = \frac{क्ष}{अ - क्ष}$.

उत्तर $क्ष = अ$, किंवा $\frac{अ}{५}$

८०. $\frac{क्ष^2 - १८}{क्ष - १२} = \frac{४}{क्ष^2}$

उत्तर. क्ष = ४ किंवा [illegible]

८१. $क्ष + ४ + \left(\frac{क्ष + ४}{क्ष - ४}\right)^{\frac{१}{२}} = \frac{१६}{क्ष - ४}$

उत्तर. $क्ष = \pm ५$ किंवा $\pm ४\sqrt{२}$

८२. $(क्ष + ११९)^{\frac{१}{३}} + (७० - क्ष)^{\frac{१}{३}} = ०$.

उत्तर $क्ष = ६$

८३. $क्ष^4 + क्ष^3 - ४क्ष^2 + क्ष + १ = ०$.

उत्तर $क्ष = १$, किंवा $\frac{-३ \pm \sqrt{५}}{२}$

८४. $२क्ष^2 + \sqrt{क्ष^2 + ९} = क्ष - ०$

उत्तर. $क्ष=\sqrt{\frac{३\pm\sqrt{४१}}{२}}$, किंवा $\sqrt{\frac{१\pm\sqrt{३७}}{२}}$

८५. $(अ+क्ष)\sqrt{अ^२+क्ष^२}=६(अ-क्ष)^२$.

उत्तर. $क्ष=\frac{९\pm४\sqrt{२}}{७}अ$.

८६. $(क्ष+३)^२-२(क्ष^२+३)=२क्ष(क्ष+१)^२$.

उत्तर. $क्ष=१,\ २\frac{१}{२},\ -३$, किंवा $-\frac{१}{२}$.

८७. $\frac{क्ष}{क्ष^२+४क्ष}+\frac{क्ष}{क्ष^२-३क्ष}=१\frac{१}{८}$.

उत्तर. $क्ष=४$, किंवा $-१\frac{३}{७}$.

८८. $क्ष^५-३क्ष^४-९क्ष^३+२१क्ष^२-१०क्ष+२४=०$.

उत्तर. $क्ष=२,४,-३$, किंवा $\pm\sqrt{-१}$.

८९. $\frac{क्ष^२+१}{क्ष}-\frac{१}{\sqrt{५}}\cdot\frac{क्ष-१}{\sqrt{क्ष}}=४\frac{२}{५}$.

उत्तर. $क्ष=५,\ \frac{१}{५}$, किंवा $\frac{१६\pm३\sqrt{२०}}{१०}$.

९०. $१६(क्ष^२+२)^{\frac{३}{२}}+\frac{३}{\sqrt{क्ष^२+२}}=३२क्ष^२+४८$.

उत्तर. $क्ष=\pm\frac{१}{२}$.

९१. $क्ष^{२म}-अ=\frac{अ}{क्ष^म}+१$.

उत्तर. $क्ष = \sqrt[म]{\frac{ब}{२} \pm \sqrt{अ + \frac{ब^२}{४}}}$.

१२. $क्ष^४ - ८क्ष^३ + १०क्ष^२ + २४क्ष + ५ = ०$.

उत्तर. $क्ष = ५, -१$, किंवा $२ \pm \sqrt{५}$.

१३. $\frac{१ + क्ष^३}{(१ + क्ष)^३} = \frac{१}{३}$. उत्तर. $क्ष = २$, किंवा $\frac{१}{२}$.

१४. $\frac{(क्ष - अ)^२}{\sqrt{क्ष}} + २(क्ष - अ) = \frac{अ^२}{\sqrt{क्ष}} + १$.

उत्तर. $क्ष = २अ + \frac{३}{२} \pm \sqrt{२अ + \frac{५}{४}}$.

१५. $\sqrt{क्ष^२ - १} + \frac{क्ष\sqrt{क्ष^२ - १}}{\sqrt{क्ष + १}} = \frac{\sqrt{(क्ष + १)^३}}{\sqrt{क्ष - १}}$.

उत्तर. $क्ष = \frac{३ \pm \sqrt{१७}}{२}$.

१६. $(१ + क्ष^३)(१ + क्ष^२)(१ + क्ष) = ३०क्ष^३$.

उत्तर. $क्ष = \frac{३ \pm \sqrt{५}}{२}$.

१७. $\frac{क्ष^४}{२} + \frac{१७क्ष^३}{४} - १७क्ष = ८$.

उत्तर. $क्ष = -८$, किंवा $-\frac{१}{२}$.

१८. $क्ष^३(क्ष^२ - २३) = १०क्ष(क्ष^२ - २४) + ६४०$.

उत्तर. $क्ष=\frac{१}{२}(५\pm३\sqrt{२१})$.

९९. $\frac{१+क्ष^{३}}{(१+क्ष)^{३}}+\frac{१-क्ष^{३}}{(१-क्ष)^{३}}=अ$.

उत्तर. $क्ष=\left\{\frac{अ+४\mp२\sqrt{३(अ+१)}}{अ-२}\right\}^{२}$.

१००. $क्ष+७\sqrt[३]{क्ष}=२२$.

उत्तर. $क्ष=८$, किंवा $(-१\pm\sqrt{-१०})^{३}$.

१०१. $\sqrt{क्ष}-\frac{७}{\sqrt{क्ष}-२}=\frac{८}{क्ष}$.

उत्तर. $क्ष=१$, किंवा १६.

१०२. $क्ष^{२}\sqrt{क्ष}+२क्ष^{३}+३५क्ष\sqrt{क्ष}+३४=\frac{७२}{क्ष\sqrt{क्ष}}$

उत्तर. $क्ष=१$.

ज्यांत दोन किंवा त्यांहून अधिक अव्यक्त पदें आहेत अशीं वर्गसमीकरणें.

उदाहरणें.

१. $क्ष+य=१०\cdots(१)$. ⎫ (१) ह्याचा वर्ग कर, आणि
$क्षय=१६\cdots(२)$. ⎭ (२) ह्यास चोहोंनीं गूण.

क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}=१०० ⎫
४क्षय =६४. ⎭ वजाबाकी कर.

क्ष^{२}−२क्षय+य^{२}=३६, वर्गमूळ काढ.

क्ष−य =±६ ⎫ ह्यांची बेरीज आणि
(१) क्ष+य = १० ⎭ वजाबाकी घे.

२क्ष = १६, किंवा ४ ; ∴ क्ष=८, किंवा
२य = ४, किंवा १६ ; ∴ य=२, किंवा

ज्यावेळेस दोन अव्यक्त पदांचा **गुणाकार**, आणि **बेरीज** हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस ह्या रीतीची योजना करावी.

क्ष−य=३ ...(१) ⎫ (१) ह्याचा वर्ग कर, आणि
२. क्षय =१० ...(२) ⎭ (२) ह्यास चोहोंनी गुण

क्ष^{२}−२क्षय+य^{२}= ९ ⎫
४क्षय =४० ⎭ बेरीज घे.

क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}=४९, वर्गमूळ काढ.

क्ष+य =±७ ⎫
(१) क्ष−य =३ ⎭ बेरीज कर, आणि वजाबाकी कर.

२क्ष = १०, किंवा −४; ∴ क्ष = ५, किंवा −२.

२य = ४, किंवा −१०; ∴ य = २, किंवा −५.

ज्या वेळेस दोन अव्यक्त पदांचा **गुणाकार** आणि **वजाबाकी** हीं दिलीं आहेत त्या वेळेस ह्या रीतीची योजना करावी.

क्ष^2 + य^2 = २०२ ....(१) } (१) ह्याची दुप्पट कर,
क्ष + य = २० ....(२) } आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.

२क्ष^2 + २य^2 = ४०४ } वजाबाकी घे.
क्ष^2 + २क्षय + य^2 = ४०० }

क्ष^2 − २क्षय + य^2 = ४, वर्गमूळ काढ.

क्ष − य = ±२ } ∴ क्ष = ११, किंवा ९.
(२) क्ष + य = २० } य = ९, किंवा ११.

ज्या वेळेस दोन अव्यक्त पदांची **बेरीज**, आणि त्यांच्या **वर्गांची बेरीज** हीं दिलीं आहेत त्या वेळेस ह्या रीतीची योजना करावी.

क्ष^2 + य^2 = ३९४ ....(१) } (१) ह्याची दुप्पट कर,
८. क्ष − य = २ ....(२) } आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.

२क्ष^2 + २य^2 = ७८८ } वजाबाकी कर.
क्ष^2 − २क्षय + य^2 = ४ }

$क्ष^२ + २क्षय + य^२ = ७८४$

$\therefore क्ष + य = \pm २८$ } $\therefore क्ष = १५$, किंवा -१३.
$क्ष - य = २$ } $य = १३$, किंवा -१५.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदांची **वजाबाकी** व त्यांच्या **वर्गांची बेरीज** हीं दिलीं आहेत तेव्हां ह्या रीतीची योजना करावी.

५. $क्ष^३ + य^३ = ४०७ \ldots (१)$ } (१) ह्यास (२) ह्यांनी भाग
$क्ष + य = ११ \ldots (२)$ } आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.

$क्ष^२ - क्षय + य^२ = ३७$ } वरील समीकरण खालचे
$क्ष^२ + २क्षय + य^२ = १२१$ } समीकरणातून वजा कर

$३क्षय = ८४$, $\therefore क्षय = २८$

$क्ष^२ - क्षय + य^२ = ३७$ } वरील समीकरणांतल्या
$क्षय = २८$ } खालचें समीकरण वजा कर

$क्ष^२ - २क्षय + य^२ = ९$, वर्गमूळ काढ.

$क्ष - य = \pm ३$ } $\therefore क्ष = ७$, किंवा ४.
$क्ष + य = ११$ } $य = ४$, किंवा ७.

$क्ष^५ + य^५ = अ$, $क्ष + य = ब$, अथवा $क्ष^न - य^न = अ$, $क्ष - य = ब$, ज्यांत न हा विषम घात प्रकाशक आहे अथवा असल्या जातीचीं समीकरणें दिलीं असल्यास

तीं वरल्या उदाहरणाप्रमाणें पहिल्यास दुसऱ्यानें भागून सोडवावीं.

६. $\left.\begin{array}{l}\text{क्ष}^{४} + \text{य}^{४} = ३३७ \cdots (१) \\ \text{क्ष} + \text{य} = \quad ७ \cdots (२)\end{array}\right\}$ (२) ह्याचा चतुर्घात कर.

$\text{क्ष}^{४} + ४\text{क्ष}^{३}\text{य} + ६\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + ४\text{क्षय}^{३} + \text{य}^{४} = २४०१$ } ह्यांची वजाबाकी कर.

(१) $\text{क्ष}^{४} + \text{य}^{४} = ३३७$

$४\text{क्ष}^{३}\text{य} + ६\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + ४\text{क्षय}^{३} = २०६४$, ४क्षय ह्यांनीं भाग.

$\text{क्ष}^{२} + \frac{३}{२}\text{क्षय} + \text{य}^{२} = \frac{५१६}{\text{क्षय}}$, (२) ह्याचा वर्ग कर.

$\text{क्ष}^{२} + २\text{क्षय} + \text{य}^{२} = ४९$, वजाबाकी घे.

$\therefore \frac{१}{२}\text{क्षय} = ४९ - \frac{५१६}{\text{क्षय}}$,

ह्यास २क्षय ह्यांनीं गुणून स्थलांतर कर.

$\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} - ९८\text{क्षय} = -१०३२$, वर्ग पुरा कर.

$\overline{\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} - ९८\text{क्षय} + ४९}|^{२} = -१०३२ + २४०१ = १३६९$,

$\text{क्षय} - ४९ = \pm ३७$;

$\therefore \text{क्षय} = ४९ \pm ३७ = ८६$, किंवा १२.

क्षय=१२, आणि क्ष+य=७, हीं समीकरणें घेऊन पहिल्या उदाहरणाप्रमाणें पुढें कृति कर, म्हणजे क्ष=३, किंवा ४; आणि य=४, किंवा ३, येतील.

७. $क्ष^2+य^2+क्ष+य=८४० \cdots (१)$

$\sqrt{क्षय} = २० \cdots (२)$

$क्षय = ४००$

$२क्षय = ८००,$

हें पहिल्या समीकरणांत मिळविल्यानें,

$क्ष^2+२क्षय+य^2+क्ष+य = १६४०$, वर्ग पुरा कर

$(क्ष+य)^2+(क्ष+य)+\left(\frac{१}{२}\right)^2 = १६४०+\frac{१}{४} = \frac{६५६१}{४}$,

$क्ष+य+\frac{१}{२} = \pm\frac{८१}{२}$,

$\therefore क्ष+य = \frac{\pm ८१-१}{२} = \frac{८०}{२}$ किंवा $-\frac{८२}{२} = ४०$ किंवा -४१;

आणि $\because क्षय=४००$ $\therefore$ पहिल्या उदाहरणाप्रमाणें पुढें कृति केली, म्हणजे $क्ष=२०$, आणि $य=२०$, येतात.

८. $क्ष^2+३य+क्ष=७५-२क्षय \quad (१)$

$क्ष+य^2-य = २४ \quad (२)$

$क्ष^2+२क्षय+क्ष+३य=७५$

$य^2+क्ष-य=२४ \quad (३)$ बेरीज घे

$क्ष^2+२क्षय+य^2+२क्ष+२य=९९,$

$(क्ष+य)^2+२(क्ष+य) = ९९$, वर्ग पुरा कर

$(क्ष+य)^2+२(क्ष+य)+१=१००$,

$क्ष+य+१=\pm १०$.

$\therefore \text{क्ष} = ९ - \text{य}$; ही किंमत (३) ह्यांत मांड.

$\text{य}^२ + ९ - \text{य} - \text{य} = २४, \quad \text{य}^२ - २\text{य} = १५,$

$\text{य}^२ - २\text{य} + १ = १६, \quad \text{य} - १ = \pm ४ ;$

$\therefore \text{य} = १ \pm ४ = ५,$ किंवा -३ ;

आणि $\text{क्ष} = ९ - \text{य} = ४,$ किंवा १२.

$\text{क्ष}^२ - \text{य}^२ = \text{क्षय} \cdots\cdots (१)$ } (१) ह्यास (क्ष+य)
$\text{क्ष}^३ + \text{य}^३ = \text{क्ष}^३ - \text{य}^३ \cdots\cdots (२)$ } ह्यांनी गूण.

$\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^२\text{य} - \text{क्षय}^२ - \text{य}^३ = \text{क्षय}(\text{क्ष} + \text{य})$ } वजाबा-
$\text{क्ष}^३ \qquad\qquad - \text{य}^३ = \text{क्ष}^२ + \text{य}^२$ } कीकर.

$\text{क्ष}^२\text{य} - \text{क्षय}^२ = \text{क्ष}^२\text{य} + \text{क्षय}^२ - \text{क्ष}^२ - \text{य}^२,$

$\therefore \text{क्ष}^२ + \text{य}^२ = २\text{क्षय}^२$ } बेरीजकर.
$(१)\ \text{क्ष}^२ - \text{य}^२ = \text{क्षय}$ }

$२\text{क्ष}^२ = २\text{क्षय}^२ + \text{क्षय}$, २क्ष ह्यांनी भाग.

$\text{क्ष} = \text{य}^२ + \frac{\text{य}}{२}$ } ह्या क्ष आणि क्ष² ह्या-
$\text{क्ष}^२ = \text{य}^४ + \text{य}^३ + \frac{\text{य}^२}{४}$ } च्या किंमती (१) ह्यांत ठेव.

$\text{य}^४ + \text{य}^३ + \frac{\text{य}^२}{४} - \text{य}^२ = \text{य}^३ + \frac{\text{य}^२}{२},$

$\text{य}^४ = \text{य}^२ + \frac{\text{य}^२}{२} - \frac{\text{य}^२}{४};$

$$य^4 = \frac{५य^2}{४},\ य^2 = \frac{५}{४},\ \therefore य = \frac{\pm\sqrt{५}}{२};$$

आणि $क्ष = \frac{५}{४} + \frac{\sqrt{५}}{४} = \frac{\sqrt{५}(\sqrt{५}+१)}{४}$.

१०. $५ + \sqrt{क्षय} = ४\sqrt{य+२} \quad \cdots (१)$

$८ + क्ष = \sqrt{१२८+६४य} \cdots (२)$

$(२)\ ८ + क्ष = \sqrt{६४(य+२)},$

$८ + क्ष = ८\sqrt{य+२}$

$(१)\ १० + २\sqrt{क्षय} = ८\sqrt{य+२}$ } वजाबाकी कर.

$$२ + २क्ष^{\frac{1}{2}}य^{\frac{1}{2}} - क्ष = ०.$$

$$\therefore २क्ष^{\frac{1}{2}}य^{\frac{1}{2}} = क्ष - २,\quad \therefore य^{\frac{1}{2}} = \frac{क्ष-२}{२क्ष^{\frac{1}{2}}},$$

$\therefore य = \frac{(क्ष-२)^2}{४क्ष},\ \therefore ६४य = \frac{१६(क्ष-२)^2}{क्ष}$, (२) ह्याचा

$$६४ + १६क्ष + क्ष^2 = ६४य + १२८,$$

$$क्ष^2 + १६क्ष + ६४ - १२८ = \frac{१६(क्ष-२)^2}{क्ष},$$

$$क्ष^3 + १६क्ष^2 - ६४क्ष = १६क्ष^2 - ६४क्ष + ६४,$$

$$क्ष^3 = ६४,\quad \therefore क्ष = ४;$$

आणि $य = \frac{(४-२)^2}{१६} = \frac{२^2}{१६} = \frac{४}{१६} = \frac{१}{४}$.

११ $\left.\begin{array}{l} क्ष^2 = ३क्ष + २य \\ य^2 = ३य + २क्ष \end{array}\right\}$ ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी कर.

$\left.\begin{array}{ll} क्ष^2 + य^2 = ५(क्ष + य) & (१) \\ क्ष^2 - य^2 = क्ष - य & (२) \end{array}\right\}$

(२) $(क्ष + य)(क्ष - य) = क्ष - य$, क्ष-य ह्यानें भाग

$(क्ष + य)(क्ष + य) = १$ (३), ∴ $क्ष + य = \frac{१}{क्ष^2 + य^2}$,

(१) $क्ष^2 + य^2 = \frac{५}{क्ष^2 + य^2}$, ∴ $(क्ष^2 + य^2)(क्ष^2 + य^2) = ५$, (४)

(३) ह्याचा वर्ग कर आणि त्यास (४) ह्यानी भाग

$$\frac{(क्ष^2 + य^2)(क्ष + य)^2}{(क्ष^2 + य^2)(क्ष^2 + य^2)} = \frac{१}{५},$$

$$\frac{(क्ष^2 + य^2)(क्ष + य)^2}{क्ष^2 + य^2} = \frac{१}{५},$$

अथवा, $\frac{क्ष^4 + २क्ष^2य^2 + य^4 + २क्ष^3य + २क्षय^3}{क्ष^2 + य^2} = \frac{१}{५}$,

ह्या समीकरणाचे छेद सोडवून त्यास $४क्ष^2य^2$

ह्यानी भाग ल्यानें

$\frac{क्ष^2}{य^2} + \frac{?}{२} + \frac{य^2}{क्ष^2} + \frac{५}{२} \cdot \frac{क्ष}{य} + \frac{५}{२} \cdot \frac{य}{क्ष} = ०$, $\frac{१}{२}$ वजा कर,

$$\frac{क्ष^२}{य^२} + २ + \frac{य^२}{क्ष^२} + \frac{५}{२}\left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right) = -\frac{१}{२},$$

अथवा $\left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right)^२ + \frac{५}{२}\left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right) = -\frac{१}{२}$;

वर्ग पुरा केल्यानें, आणि वर्गमूळ काढल्यानें,

$\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष} = \frac{-५ \pm \sqrt{१७}}{४}$, $\frac{क्ष}{य}$ ह्यानें गुणून स्थलांतर क.

$\frac{क्ष^२}{य^२} + \frac{५ \mp \sqrt{१७}}{४} \cdot \frac{क्ष}{य} = -१$, वर्ग पुरा करून मूळ काढ.

$$\frac{क्ष}{य} = \frac{-५ \pm \sqrt{१७} \pm \sqrt{-२२ \pm १० \sqrt{१७}}}{}.$$

(२) $(क्ष^२ + य^२)(क्ष + य)(क्ष - य) - (क्ष - य) = ०$

$$\{(क्ष^२ + य^२)(क्ष + य) - १\}(क्ष - य) = ०,$$

$$\therefore क्ष - य = ०, \quad \therefore क्ष = य$$

हें उदाहरण सोडवितांना ऐवढें असें दिसून येतें कीं जो गुणक समीकरणांतील सर्व पदांस साधारण आहे त्याची किंमत ० आहे.

पुनः, $क्ष^३ = ३क्ष + २क्ष = ५क्ष$, $\therefore क्ष^२ = ५$, $\therefore क्ष = \sqrt{५}$.

ज्या समीकरणांतील प्रत्येक पदांत अव्यक्त पदांच्या घातप्रकाशकाची बेरीज एकसारखीच आहे

त्या समीकरणांस **सजातीयसमीकरणें** म्हणतात. आणि तीं समीकरणें सोडविण्यास जर सुगम रीति सांपडत नाहीं, तर त्यांतील एक अव्यक्त पद, दुसऱ्या अव्यक्त पदास एकाद्या अव्यक्त गुणकानें गुणून, त्याबरोबर धरून तीं समीकरणें सोडवावीं. ही रीति खालच्या उदाहरणांत दाखविली आहे.

१२. $क्ष^2 + य^2 = ३४$, $क्ष = वय$ घे, तर $क्ष^2 = व^2 य^2$,

$क्ष^2 - क्षय = १०$ आणि, $क्षय = वय^2$.

$\therefore व^2 य^2 + य^2 = ३४$, $(व^2 + १) य^2 = ३४$, $\therefore य^2 = \frac{३४}{व^2 + १}$,

$व^2 य^2 - वय^2 = १०$, $(व^2 - व) य^2 = १०$, $\therefore य^2 = \frac{१०}{व^2 - व}$.

$\therefore \frac{३४}{व^2 + १} = \frac{१०}{व^2 - व}$, अथवा, $\frac{१७}{व^2 + १} = \frac{५}{व^2 - व}$,

$१७ व^2 - १७ व = ५ व^2 + ५$, . $१२ व^2 - १७ व = ५$.

$\therefore व^2 - \frac{१७}{१२} व = \frac{५}{१२}$, आणि हें वर्गसमीकरण सोडविल्यानें, $व = \frac{५}{३}$.

$\therefore य^2 = \frac{१०}{व^2 - व} = \frac{१०}{\frac{२५}{९} - \frac{५}{३}} = \frac{९०}{२५ - १५} = \frac{९०}{१०} = ९$,

$\therefore य = ३$, आणि $क्ष = वय = \frac{५}{३} \times ३ = ५$.

$$\left.\begin{array}{ll} & क्ष^2 + क्षय + य^2 = ३७ \cdots (अ) \\ १३. & क्ष^2 + क्षज्ञ + ज्ञ^2 = २८ \cdots (ब) \\ & य^2 + यज्ञ + ज्ञ^2 = १९ \cdots (क) \end{array}\right\}$$

हें उदाहरण पाठीमागचे रीतीनें सुटेल, पण आपण हें दुसरे रीतीनें सोडवूं.

$$\left.\begin{array}{ll} अ-ब. & य^2 - ज्ञ^2 + (य - ज्ञ) क्ष = ९ \\ ब-क. & क्ष^2 - य^2 + (क्ष - य) ज्ञ = ९ \end{array}\right\} \text{अथवा.}$$

$$\left.\begin{array}{l} क्ष + य + ज्ञ = \frac{९}{य - ज्ञ} \\ क्ष + य + ज्ञ = \frac{९}{क्ष - य} \end{array}\right\} (ड)$$

$\therefore \frac{९}{य - ज्ञ} = \frac{९}{क्ष - य}$, अथवा $य - ज्ञ = क्ष - य$,

$\therefore क्ष + ज्ञ = २य$, ही किंमत (ड) ह्यांत मांड.

$३य = \frac{९}{य - ज्ञ}$, $य = \frac{३}{य - ज्ञ}$, $य^2 - यज्ञ = ३$,

$$\left.\begin{array}{l} यज्ञ = य^2 - ३, \therefore ज्ञ = \frac{य^2 - ३}{य} \\ ज्ञ^2 = \frac{य^4 - ६य^2 + ९}{य^2} \end{array}\right| \text{ह्या किंमती (क) ह्यांत मांड.}$$

$$य^2 + य^2 - ३ + \frac{य^4 - ६य^2 + ९}{य^2} = १९,$$

$$२य^2 + \frac{य^4 - ६य^2 + ९}{य^2} = २२,$$

$$२य^{४} + य^{४} - ६य^{२} + ९ = २२य^{२},$$

$$३य^{४} - २८य^{२} = -९, \quad य^{४} - \frac{२८}{३}य^{२} = -३,$$

$$य^{४} - \frac{२८}{३}य^{२} + \overline{\frac{१४}{३}}^{२} = -३ + \frac{१९६}{९} = \frac{१९६}{९} - \frac{२७}{९} = \frac{१६९}{९},$$

$$य^{२} - \frac{१४}{३} = \pm\frac{१३}{३}, \quad य^{२} = \frac{१४ \pm १३}{३} = ९,$$

$$\therefore य = \pm ३, \quad \therefore ज्ञ = य - \frac{३}{य} = \pm ३ - \frac{३}{\pm ३} = \pm २,$$

आणि $क्ष = २य - ज्ञ = \pm ६ \mp २ = \pm ४.$

उदाहरणें.

१. $क्ष^{२} + य^{२} = २०.$ $क्ष^{२} - य^{२} = १२.$ उत्तर. $क्ष = ४.$ $य = २.$

२. $क्ष + य = ६.$ $क्ष^{२} + य^{२} = २६.$ उत्तर. $क्ष = ५.$ $य = १.$

३. $क्ष^{२} + य^{२} = १०.$ $क्ष - य = २.$ उत्तर. $क्ष = ३.$ $य = १.$

४. $क्ष^{२} + य^{२} = २५.$ $क्ष + य = १.$ उत्तर. $क्ष = ४,$ किंवा -३ ; $य = -३,$ किंवा $४.$

५. $क्ष^2 - य^2 = १६.$; $क्ष + य = ८.$ — उत्तर. $क्ष = ५.$; $य = ३.$

६. $क्ष - य = १.$; $क्ष^3 - य^3 = १९.$ — उत्तर. $क्ष = ३$, किंवा $-२.$; $य = २$, किंवा $-३.$

७. $क्ष^3 + य^3 = १८९.$; $क्ष^2 य + क्ष य^2 = १८०.$ — उ. $क्ष = ५$, किंवा ४. ; $य = ४$, किंवा ५.

८. $१० क्ष + य = ३ क्ष य.$; $य - क्ष = २.$ — उत्तर $क्ष = २$, किंवा $-\frac{१}{३}.$; $य = ४$, किंवा $\frac{५}{३}.$

९. $क्ष^2 + य^2 + क्ष + य = १८.$; $२ क्ष य = १२.$ — उ. $क्ष = ३, २, -३ \pm \sqrt{३}.$; $य = २, ३, -३ \mp \sqrt{३}.$

१०. $क्ष^2 य + य^2 = १०.$; $क्ष य^2 + य = ४.$ — उत्तर. $क्ष = ३.$; $य = १.$

११. $\frac{क्ष + य}{क्ष - य} = अ^2.$; $क्ष^2 - य^2 = ब^2.$ — उत्तर. $क्ष = \frac{ब}{२अ}(अ^2 + १),$; $य = \frac{ब}{२अ}(अ^2 - १).$

१२. $९ क्ष^2 = ४ य^2.$; $३ क्ष य + २ क्ष + य = ४८५.$ — उ. $क्ष = १०, -१०\frac{७}{९}$; $य = १५, -१६\frac{१}{६}$

१३. $क्ष^2 + य^2 - क्ष - य = ७८.$; $क्ष य + क्ष + य = ३९.$

उत्तर. $\begin{cases} क्ष = \frac{-१३ \pm \sqrt{-३०}}{२}, ९, किंवा ३. \\ य = \frac{-१३ \mp \sqrt{-३०}}{२}, ३, किंवा ९. \end{cases}$

१४. $\left.\begin{array}{l} \frac{१}{य} - \frac{१}{क्ष} = \frac{१}{४}. \\ क्ष^{२}य - क्षय^{२} = १६. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = ४, किंवा -२. \\ य = २, किंवा -४. \end{cases}$

१५. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२} + क्षय = अ^{२} + अब. \\ य^{२} + यक्ष = ब^{२} + अब. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = अ. \\ य = ब. \end{cases}$

१६. $\left.\begin{array}{l} १२क्षय = ५क्ष + १२य. \\ य^{२} - क्ष^{२} = १. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = १\frac{१}{३}. \\ य = १\frac{२}{३}. \end{cases}$

१७ $\left.\begin{array}{l} २य + ३क्ष = ८. \\ ३य^{२} + २क्ष^{२} = ११. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = २. किंवा २\frac{४}{३५}. \\ य = १, किंवा \frac{२९}{३५}. \end{cases}$

१८. $\left.\begin{array}{l} य - क्ष = २. \\ ३क्षय = १० क्ष + य. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = २, किंवा -\frac{१}{३}. \\ य = ४, किंवा १\frac{२}{३}. \end{cases}$

१९. $\left.\begin{array}{l} क्ष + य + \sqrt{क्ष + य} = १२. \\ क्ष^{३} + य^{३} = १८९. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = ५, किंवा ४. \\ य = ४, किंवा ५. \end{cases}$

२०. $\left.\begin{array}{l} ४क्षय = ९६ - क्ष^{२}य^{२}. \\ क्ष + य = ६. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = ४, २, ३ \pm \sqrt{२१}. \\ य = २, ४, ३ \mp \sqrt{२१}. \end{cases}$

२१. $\frac{क्ष^{२}+य^{२}}{क्षय}=\frac{१३}{६}$; $क्ष^{३}य+क्षय^{३}=क्ष^{२}य^{२}+४२$. उ० $\begin{cases} क्ष=३. \\ य=२. \end{cases}$

२२. $क्ष^{२}+य^{२}+४क्ष-६य=१३$. $क्षय-३क्ष+२य=११$. उ० $\begin{cases} क्ष=३,-१,-३,-७. \\ य=४,८,-२,२. \end{cases}$

२३. $(क्ष^{२}+य^{२})क्ष^{२}य^{२}=३६००$. $क्ष^{२}य+क्षय^{२}=८४$. उ० $\begin{cases} क्ष=३,\ ४. \\ य=४,\ ३. \end{cases}$

२४. $क्ष^{४}+य^{४}=२६५७$. $क्ष+य=११$. उ० $\begin{cases} क्ष=७, \text{ किंवा } ४. \\ य=४, \text{ किंवा } ७. \end{cases}$

२५. $२क्ष+२य-क्ष^{२}-य^{२}+२=०$. $क्षय=३$.

उ० $\begin{cases} क्ष=३,\ १, \text{ किंवा } -(१\pm\sqrt{-२}). \\ य=१,\ ३, \text{ किंवा } -(१\mp\sqrt{-२}). \end{cases}$

२६. $क्ष^{२}+य^{२}=६१$. $क्ष^{२}-क्षय=६$. उत्तर $\begin{cases} क्ष=६. \\ य=५. \end{cases}$

२७. $क्ष+य=१०$. $क्ष^{५}+य^{५}=१७०५०$. उ० $\begin{cases} क्ष=७, \text{ किंवा } ३. \\ य=३, \text{ किंवा } ७. \end{cases}$

२८. $क्ष^{२}+क्षय+य^{२}=२१$. $क्ष-क्ष^{\frac{१}{२}}य^{\frac{१}{२}}+य=३$. उ० $\begin{cases} क्ष=१. \\ य=४. \end{cases}$

२९. $क्ष^{२}य^{२} + १२क्षय = ९क्ष^{२} + ४य^{२}$. $\quad क्ष^{२} + ४क्ष + य^{२} = ६य + २४$. उ० $क्ष = ४, -३$. $य = २, ९$.

३०. $क्ष - य = २$. $\quad क्ष^{४} + य^{४} = २७२$. उ० $क्ष = ४, -२, \sqrt{-१५} + १$. $य = २, -४, \sqrt{-१५} - १$.

३१. $क्ष^{२} + २क्षय + य + ३क्ष = ७३$. $\quad य^{२} + क्ष + ३य = ४४$ उ० $क्ष = ४, १६$. $य = ५, -७$.

३२. $(क्ष^{२} + य^{२})\cdot(क्ष + य) = १२०$. $\quad (क्ष - य)\cdot(क्ष^{२} - य^{२}) = २४$. उ० $क्ष = ४$. $य = २$.

३३. $क्षय = ६$. $\quad ३क्ष^{२} - ७य^{२} + १ = ०$ उत्तर. $क्ष = \pm ३$. $य = \pm २$.

३४. $२क्ष^{-\frac{१}{२}} य^{-\frac{१}{२}} = १ + क्ष^{\frac{३}{२}} य^{\frac{१}{२}}$. $\quad क्ष - य = \sqrt{अ - क्ष + य} - \sqrt{अ + क्ष - य}$ उ० $क्ष = १$. $य = १$.

३५. $क्ष - य = ३$. $\quad क्ष^{३} + य^{३} = १९(क्ष + य)$ उ० $क्ष = ५, -२$. $य = २, -५$.

३६. $क्ष - २\sqrt{क्षय} + य - \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = ०$. $\quad \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = ५$.

उत्तर. $क्ष = ९$, किंवा $\frac{२५}{४}$; $य = ४$, किंवा $\frac{२५}{४}$

३७. $\frac{क्ष^{२}}{य^{२}} + \frac{४क्ष}{य} = ९\frac{४}{९}.$
$क्ष - य = २.$

उत्तर. $क्ष = ५.$ $य = ३.$

३८. $क्ष^{४} - २क्ष^{२}य + य^{२} = ४९.$
$क्ष^{४} - २क्ष^{२}य^{२} + य^{४} - क्ष^{२} + य^{२} = २०$

उत्तर. $क्ष = \pm ३$, किंवा $\pm\sqrt{६}.$
$य = २$, किंवा $-१.$

३९. $क्ष^{न} + य^{न} = अ.$
$क्षय = ब.$

उ० $क्ष = \sqrt[न]{\frac{१}{२}\left(\sqrt{अ^{२} - ४ब^{न}} + अ\right)}.$
$य = \frac{ब}{\sqrt[न]{\frac{१}{२}\left(\sqrt{अ^{२} - ४ब^{न}} + अ\right)}}.$

४०. $\frac{क्ष^{२}}{य^{२}} + \frac{य^{२}}{क्ष^{२}} - \frac{३}{२}\left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right) = २\frac{३}{५०}.$
$४क्ष - ५य = १०.$

उत्तर. $क्ष = ५, य = २.$

४१. $क्ष^{२} - क्षय = ४८य.$
$क्षय - य^{२} = ३क्ष.$

उ० $क्ष = १६, -९\frac{३}{५}.$
$य = ४, २\frac{२}{५}.$

४२. $क्ष^{२} + य^{२} - १५(क्ष + य) = -७०.$
$३क्षय + ३१(क्ष + य) = २१०.$

उ० $क्ष = २.$ $य = ४$

४३. $\sqrt{य} : \sqrt{क्ष} :: \sqrt{क्ष}+३ : \sqrt{क्ष}+१.$
$\sqrt{क्षय} + २\sqrt{य} = ३क्ष + ३\sqrt{क्ष}.$ } उ॰ { क्ष=१. य=४.

४४. $\frac{क्ष}{य} - \frac{य}{क्ष} = \frac{११}{३०}.$
$क्ष + क्षय = ६६.$ } उत्तर. { क्ष= ६. य= ५.

४५. $३क्ष^{२} = २क्षय + २४.$
$य^{२} = क्षय - ३.$ } उत्तर. { क्ष= ४. य= ३.

४६. $क्ष^{२} - २क्षय + ३य^{२} = ९.$
$क्ष^{२} - ४क्षय + ५य^{२} = ५.$ } उ॰ { $क्ष = \pm ३, \pm \frac{५}{\sqrt{२}}.$ $य = \pm २, \pm \frac{१}{\sqrt{२}}.$

४७. $२क्ष^{२} - ३क्षय + य^{२} = ४.$
$क्ष^{२} - २क्षय + ३य^{२} = ९.$ } उ॰ { $क्ष = \pm ३.$ $य = \pm २.$

४८. $क्ष^{\frac{३}{२}} + य^{\frac{२}{३}} = ३क्ष.$
$क्ष^{\frac{१}{२}} + य^{\frac{१}{३}} = क्ष.$ } उ॰ { $क्ष = \{(+२)^{२} = ४\}, \{(-१)^{२} = १\}$ $य = ८.$

४९. $\sqrt{\frac{३क्ष}{क्ष+य}} + \sqrt{\frac{क्ष+य}{३क्ष}} = २.$
$क्षय - (क्ष+य) = ५४.$ } उ॰ { $क्ष = ६, -\frac{९}{२}.$ $य = १२, -९.$

५०. $(क्ष+य) = ३(क्ष-य)^{\frac{२}{३}}.$
$(क्ष^{३}+य^{३})(क्ष+य) = २७.$ } उ॰ { क्ष= २. य= १.

५१. $\frac{क्ष^{२}+क्षय+य^{२}}{क्ष^{२}-क्षय+य^{२}}=२\frac{१}{३}$. $\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{य}=१\frac{१}{२}$. उ० क्ष = २, १. य = १, २.

५२. $२क्ष^{२}-२क्षय=३य$, $३क्षय-३य^{२}=२क्ष$. उ० क्ष = ३, य = २

५३. $(क्ष+य)(क्ष-य)^{२}=३२$. $क्ष^{२}-य^{२}-क्ष-य=८$ उ० क्ष = ५, य = ३.

५४. $४क्षय^{२}-क्ष^{२}य^{२}=\frac{य^{६}}{४}-४$. $क्ष^{३}-क्षय(क्ष-य)=३$. उ० क्ष = १. य = २

५५. $(क्ष+य)^{\frac{३}{२}}-(क्ष-य)^{\frac{३}{२}}=अ$. $(क्ष+य)^{\frac{१}{२}}+(क्ष-य)^{\frac{१}{२}}=ब$.

उ० $क्ष=\frac{अ^{२}}{४}+\left\{\frac{१}{४}\left(ब^{२}+\frac{अ^{२}}{ब^{२}}\right)\right\}^{२}$, $य=\frac{अ}{४}\left(ब^{२}+\frac{अ^{२}}{ब^{२}}\right)$.

५६. $(क्ष^{२}+य^{२})(क्ष+य)=२क्षय$. $(क्ष^{४}-य^{४})(क्ष^{२}+य^{२})=क्ष^{२}य^{२}$. उ० $क्ष=\frac{१०५}{१३६}$. $य=\frac{४५}{१३६}$.

५७. $(क्ष^{२}+य^{२})\frac{य}{क्ष}=\frac{२६}{३}$. $(क्ष^{२}-य^{२})\frac{क्ष}{य}=\frac{१५}{२}$. उ० क्ष = ३. य = २.

५८. $(क्ष^{२}+य^{२})-(क्ष^{४}+य^{४})=\frac{६३}{२५६}.$ $\Big\}$ उ. $\begin{cases} क्ष=\frac{१}{२}. \\ य=\frac{१}{४}. \end{cases}$
$(क्ष+य)^{२}+(क्षय-२)क्षय=\frac{२१}{६४}.$

५९. $(क्ष-२)य+क्ष-२य^{२}=(य^{२}-१)\sqrt{क्षय}.$
$\frac{\sqrt{क्षय}-१२}{क्षय-१८}=\frac{क्षय}{४}.$

उत्तर. क्ष $=८$, य $=२$.

६०. $(क्ष^{४}-य^{४})(क्ष^{२}-य^{२})=४५क्ष^{२}य^{२}.$ $\Big\}$ उ. $\begin{cases} क्ष=४. \\ य=२. \end{cases}$
$(क्ष^{२}+य^{२})(क्ष+य)=१५क्षय.$

६१. $\sqrt[४]{क्ष+य}+\sqrt[४]{क्ष-य}=य.$
$क्षय+\sqrt{क्ष^{२}य^{२}-य^{४}}=\sqrt{क्ष+य}+\sqrt{क्ष-य}.$

उत्तर. क्ष $=$ य $=\sqrt[३]{२}$.

६२. $८\sqrt{य+२}=क्ष+६.$ $\Big\}$ उ. $\begin{cases} क्ष=४. \\ य=\frac{१}{४}. \end{cases}$
$क्ष^{३}-य^{३}=(य+२)^{३}.$

६३. $क्ष^{२}-क्षय+य^{२}=\frac{९१}{क्ष^{२}+य^{२}}.$ $\Big\}$ उ. $\begin{cases} क्ष=३. \\ य=२. \end{cases}$
$क्ष^{२}+क्षय+य^{२}=\frac{१३३}{क्ष^{२}-क्षय+य^{२}}.$

६४. $\sqrt{क्ष^{२}+\sqrt[३]{क्ष^{४}य^{२}}}+\sqrt{य^{२}+\sqrt[३]{क्ष^{२}य^{४}}}=अ.$
$क्ष+य+३\sqrt[३]{बक्षय}=ब.$

उत्तर. $\begin{cases} क्ष = \frac{१}{२}\left\{ब^{\frac{२}{३}} + \sqrt{२अ^{\frac{२}{३}} - ब^{\frac{२}{३}}}\right\}^{३} \\ य = \frac{१}{२}\left\{ब^{\frac{२}{३}} \;\; \sqrt{२अ^{\frac{२}{३}} - ब^{\frac{२}{३}}}\right\}^{३} \end{cases}$

६५. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२} + य^{२} = ३क्षय \\ क्ष^{५} + य^{५} = २. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = \frac{\sqrt[५]{१०}}{२\sqrt{५}}(\sqrt{५} + १). \\ य = \frac{\sqrt[५]{१०}}{२\sqrt{५}}(\sqrt{५} - १). \end{cases}$

६६. $\left.\begin{array}{l} (क्ष + य)^{३} = ६४(क्ष - य). \\ (क्ष^{३} + य^{३})(क्ष + य) = ७६. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = \frac{५}{२} \\ य = \frac{३}{२}. \end{cases}$

६७. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{३} + य^{३} = १ + २क्षय + ३क्ष^{२}य^{२}. \\ क्ष^{३} + य^{३} = २यक्ष + २य^{२} + क्ष + १. \end{array}\right\}$ उ॰ $\begin{cases} क्ष = २. \\ य = १. \end{cases}$

६८. $\left.\begin{array}{l} (क्ष^{२} + क्षय + य^{२})(क्ष^{२} - क्षय + य^{२}) = ४८१ \\ (क्ष^{२} + य^{२})^{२} - (क्ष^{२} + य^{२})क्षय = ३२५. \end{array}\right\}$

उत्तर. क्ष = ३, य = ४.

६९. $\left.\begin{array}{l} क्ष - २\sqrt{२अय - य^{२}} = ५\sqrt{अय}. \\ क्ष^{२} - ८\sqrt{अय}\cdot क्ष = २अय - ९य^{२}. \end{array}\right\}$

उत्तर. क्ष = ७अ, य = अ.

७०. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{६}+य^{६}=\frac{१}{४} \\ क्ष^{२}+य^{२}=१. \end{array}\right\}$ उत्तर. $क्ष=य=\frac{१}{\surd २}$.

७१. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{७}-य^{७}=१२७. \\ क्ष-य=१. \end{array}\right\}$ उत्तर. $क्ष=२,\ य=१$.

७२. $\left.\begin{array}{l} क्ष+य+ज्ञ=३अ. \\ क्षय+क्षज्ञ+यज्ञ=३अ^{२}. \\ क्षयज्ञ=अ^{३}. \end{array}\right\}$ उ॰ $\left\{\begin{array}{l} क्ष=अ. \\ य=अ. \\ ज्ञ=अ. \end{array}\right.$

७३. $\left.\begin{array}{l} क्षय=क्ष+य. \\ क्षज्ञ=२(क्ष+ज्ञ) \\ यज्ञ=३(य+ज्ञ) \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=१\frac{५}{७}. \\ य=२\frac{२}{५}. \\ ज्ञ=-१२. \end{array}\right.$

७४. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२}+य^{२}+ज्ञ^{२}=१४ \\ क्ष^{२}+य=३. \\ ज्ञ^{२}+य=११. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=\pm १. \\ य=२. \\ ज्ञ=\pm ३. \end{array}\right.$

७५. $\left.\begin{array}{l} क्षय+ज्ञ=५. \\ क्षयज्ञ=४. \\ २(क्ष^{२}-य)=(य^{२}-क्ष)^{२}. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=२,\ १. \\ य=२,\ १. \\ ज्ञ=१,\ ४. \end{array}\right.$

७६. $\left.\begin{array}{l} क्ष^{२}+क्षय+य^{२}=१३. \\ य^{२}+यज्ञ+ज्ञ^{२}=४९. \\ क्ष^{२}+क्षज्ञ+ज्ञ^{२}=३१. \end{array}\right\}$ उत्तर. $\left\{\begin{array}{l} क्ष=\pm १. \\ य=\pm ३. \\ ज्ञ=\pm ५. \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} क्ष^{-२} य^{-१} ज्ञ = १\frac{१}{२}. \\ ७७.\ क्ष^{-१} य ज्ञ^{२} = १८. \\ क्ष य^{२} ज्ञ^{३} = १०८. \end{array}\right\} \quad उत्तर. \quad \left\{\begin{array}{l} क्ष = \pm १. \\ य = \pm २. \\ ज्ञ = \pm ३. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} (२\sqrt{क्ष} + \sqrt{य})^{२} = य^{२} - ४ क्ष ज्ञ. \\ ७८.\ २\sqrt{क्ष} + \sqrt{य} = \frac{क्ष + य + ज्ञ}{२\sqrt{क्ष}}. \\ ६\sqrt{य} = क्ष + य^{\frac{३}{४}} + ज्ञ \end{array}\right\} \quad उ. \quad \left\{\begin{array}{l} क्ष = ४. \\ य = १६. \\ ज्ञ = १२. \end{array}\right.$$

प्रश्न

१. अ, लंडनाहून यार्कास यावयाकरितां निघाला, आणि त्याचवेळेस ब, यार्काहून लंडनास यावयाकरितां निघाला. त्या दोघांची वाटेंत गांठ पडल्यानंतर अ ९ तासांनीं यार्कास पोंचला, आणि ब १६ तासांनीं लंडनास पोंचला; तर अस लंडनाहून यार्कास जावयास किती तास लागले, आणि बस यार्काहून लंडनास जावयास किती तास लागले?

एकेकास त्यांची गांठ पडण्याच्या अगोदर रस्त्यावर जितके तास लागले ते = क्ष धर,

तर $क्ष + ९ =$ अ चा सगळा वेळ

आणि $क्ष + १६ =$ ब चा ………

$\overset{ता}{क्ष+९} : \overset{ता}{क्ष} : : \overset{वाट}{१} : \frac{क्ष}{क्ष+९} =$ { गांठ पडण्याचे पूर्वी अ जितका रस्ता चालून आला तो,

$क्ष+१६ : क्ष : : १ : \frac{क्ष}{क्ष+१६} =$ { गांठ पडण्याचे पूर्वी ब जितका रस्ता चालून आला तो,

$$म्हणून, \frac{क्ष}{क्ष+९} + \frac{क्ष}{क्ष+१६} = १ ;$$

$$क्ष^{२}+१६क्ष+क्ष^{२}+९क्ष = क्ष^{२}+२५क्ष+१४४ ;$$

$$\therefore क्ष^{२} = १४४ , \quad क्ष = १२ ,$$

$$\therefore क्ष + ९ = २१ = \text{अ चा वेळ},$$

$$\text{आणि } क्ष + १६ = २८ = \text{ब चा वेळ}.$$

अथवा प्रकारांतरानें; अ चा सगळा वेळ = क्ष घे,

आणि ब चा ……… = य ··

$क्ष : ९ : : १ : \frac{९}{क्ष} =$ गांठ पडल्यावर अ जितका रस्ता चालून गेला तो,

$य : १६ : : १ : \frac{१६}{य} =$ ……… ब ………

$$म्हणून, \frac{९}{क्ष} + \frac{१६}{य} = १, \therefore ९य + १६क्ष = क्षय .$$

परंतु क्ष=य−७, ∴ ही किंमत पहिल्या समीकरणांत मांडल्यानें,

९य+१६य−११२=य^{२}−७य,

य^{२}−३२य = −११२,

य^{२}−३२य+१६^{२}=२५६−११२ = १४४,

य−१६=१२, ∴ य=२८ तास= ब चा वेळ;

आणि क्ष=य−७ =२१ तास=अचा····

२. अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस वाट चालूं लागले; अ, क कडून ड कडे जावयास निघाला, आणि ब, ड कडून क कडे यावयास निघाला; त्यांची रस्त्यावर गांठ पडली, तेव्हां असें समजून आलें कीं, अ, ब पेक्षां ३० मैल जास्ती चालला, आणि ते त्याच चालीनें पुढें चालले तर अ, ड स चार दिवसांनीं पोहोंचेल, आणि ब, क स ९ दिवसांनीं पोहोंचेल; तर ड आणि क ह्यांच्यामध्यें किती अंतर होतें?

गांठ पडल्याचे पूर्वीं अ जितका रस्ता चालून आला तो = क्ष घे, आणि ब जितका रस्ता चालून आला तो = य घे.

तर क्ष=य+३०.

आतां य मैल जमीन अ चार दिवसांत जातो,

∴ य : क्ष : : ४ : $\frac{\text{४क्ष}}{\text{य}}$ = जे भेटल्याच्या पूर्वी जितके दिवस अ चालत होता ते.

पुनः क्ष मैल जमीन ब नऊ तासांत जातो,

∴ क्ष : य : : ९ : $\frac{\text{९य}}{\text{क्ष}}$ = जे भेटल्याच्या पूर्वी जितके दिवस ब चालत होता ते.

म्हणून $\frac{\text{४क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{९य}}{\text{क्ष}}$;

∴ ४क्ष^{2} = ९य^{2}, ∴ २क्ष = ३य, ∴ क्ष = $\frac{\text{३य}}{\text{२}}$,

म्हणून, $\frac{\text{३य}}{\text{२}}$ = य + ३०, ∴ य = ६०, आणि क्ष = ९०,

∴ क्ष + य = १५० मैल = सगळें अंतर.

३. अशा दोन संख्या कोणत्या आहेत, कीं ज्यांची वजाबाकी २ येईल, आणि ज्यांच्या गुणाकारास ज्यांच्या बेरजेनें गुणिलें असतां गुणाकार १२ येईल.

मोठी संख्या = क्ष घे, आणि धाकटी = य घे.

तर क्ष − य = २, म्हणजे य = क्ष − २,

आणि क्षय(क्ष + य) = १२, म्हणजे क्ष^{2}य + क्षय^{2} = १२,

क्ष^{2}(क्ष − २) + क्ष(क्ष − २)^{2} = १२,

क्ष^{3} − २क्ष^{2} + क्ष^{3} − ४क्ष^{2} + ४क्ष = १२,

$$२\text{क्ष}^3 - ६\text{क्ष}^2 + ४\text{क्ष} - १२ = ०,$$

$$२\text{क्ष}^2(\text{क्ष}-३) + ४(\text{क्ष}-३) = ०,$$

$$\therefore \text{क्ष} = ३, \quad \text{आणि } \text{य} = १.$$

४. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्याच घनांच्या बेरजेनें गुणिलें असतां गुणाकार ११२ होईल, आणि त्यांच्या बेरजेचा घन त्यांच्या वजाबाकीस :: ३२ : १ होईल.

मोठी संख्या = क्ष घे, आणि धाकटी = य घे.

$$\text{तर } (\text{क्ष}+\text{य})(\text{क्ष}^3+\text{य}^3) = ११२,$$

$$\text{आणि } (\text{क्ष}+\text{य})^3 : (\text{क्ष}-\text{य}) :: ३२ : १,$$

$$(\text{क्ष}+\text{य})^4 : (\text{क्ष}^2-\text{य}^2) :: ३२ : १, \text{ अथवा}$$

$$\text{क्ष}^4 + ४\text{क्ष}^3\text{य} + ६\text{क्ष}^2\text{य}^2 + ४\text{क्ष}\text{य}^3 + \text{य}^4 = ३२(\text{क्ष}^2-\text{य}^2),$$

$$४\text{क्ष}^4 + ४\text{क्ष}^3\text{य} \qquad + ४\text{क्ष}\text{य}^3 + ४\text{य}^4 = ४४८$$

$$\text{क्ष}^4 \qquad - ६\text{क्ष}^2\text{य}^2 \qquad + ३\text{य}^4 = ४४८ - ३२(\text{क्ष}^2-\text{य}^2)$$

$$\text{क्ष}^4 - २\text{क्ष}^2\text{य}^2 + \text{य}^4 + \tfrac{३२}{३}(\text{क्ष}^2-\text{य}^2) = \tfrac{४४८}{३},$$

$$(\text{क्ष}^2-\text{य}^2)^2 + \tfrac{३२}{३}(\text{क्ष}^2-\text{य}^2) + \left(\tfrac{१६}{३}\right)^2 = \tfrac{२५६}{९} + \tfrac{१३४४}{९} = \tfrac{१६००}{९},$$

$$\text{क्ष}^2-\text{य}^2 + \tfrac{१६}{३} = \tfrac{४०}{३}, \quad \text{क्ष}^2-\text{य}^2 = \tfrac{२४}{३} = ८,$$

$$\therefore (क्ष+य)^४ = ३२(क्ष^२ - य^२) = २५६,$$

$$क्ष+य=४ \;,\; क्ष-य=२,$$

$$\therefore क्ष=३ \;,\; य=१.$$

ज्यांपासून समीकरणें उत्पन्न होतात असे प्रश्न.

१. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची वजाबाकी ८ होईल, आणि त्यांचा गुणाकार १२८ होईल.

उत्तर. ± ८ आणि ± १६.

२. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची बेरीज ४० होईल, आणि त्यांच्या वर्गांची बेरीज ८१८ होईल.

उत्तर. २३, आणि १७.

३. अशी संख्या कोणती आहे, कीं जी आपल्या व्युत्क्रमापेक्षां एकानें जास्त आहे.

उत्तर. $\frac{१}{२}(१ \pm \sqrt{५})$.

४. एका मनुष्यानें ६० पौंडांस जितकीं मेंढरें आलीं तितकीं विकत घेतलीं, आणि त्यांपैकीं १५ ठेवून बाकीचीं ५४ पौंडांस विकलीं आणि त्या व्यापारांत त्यास एकेका मेंढरास दोन दोन शिलिंग मिळाले; तर त्यानें किती मेंढरें विकत घेतलीं होतीं? उत्तर. ७५.

५. अ, ब, आणि क हे तिघे मिळून कांहीं एक काम कांहीं तासांत करतात; अच जर तें काम एकटा करूं लागता तर त्यास पूर्वींचेपेक्षां ६ तास जास्ती लागते, बस १५ तास जास्ती लागते, आणि कस दुप्पट तास लागते; तर त्या तिघांनीं किती तासांत तें काम संपविलें?

उत्तर. ३ तास.

६. एका वर्तुळाकृति मैदानांत अब आणि कड असे दोन रस्ते गेले आहेत. त्यांत अब रस्ता कड रस्त्याचे ई बिंदूंत दोन सारखे विभाग करितो, अई =२५ फूट, आणि बई =½ कड-१६ फूट; तर कडची लांबी किती आहे?   उत्तर. ४० फूट.

७. एका मनुष्यानें २४० रुपयांस कांहीं बैल विकत घेतले, पुढें त्यांपैकीं तीन गमावल्यावर बाकीचे बैल एकेका बैलास मूळ किंमतीपेक्षां ८ रुपये नफा घेऊन विकले, तेव्हां त्या व्यापारांत त्यास ५९ रुपये एकंदर नफा झाला; तर त्यानें किती बैल विकत घेतले होते?

उत्तर. १६ बैल.

८. कांहीं मनुष्यें दारू पिण्याकरितां एका कलालाचे दुकानीं गेलीं; आणि दारू प्याल्यानंतर पाहातात तों आपणांकडे दुकानदाराचे ३ पौंड १२ शिलिंग झाले, पण त्या मंडळींतून दोन मनुष्यांजवळ पैसा नव्हता म्हणून बाकीच्यांतील एकेकास ६ पेन्स जास्ती द्यावे लागले; तर कलालाचे दुकानीं किती मनुष्यें गेलीं होतीं?

उत्तर. १८ मनुष्यें.

९ एक काटकोनचौकोनाकृति शेत होतें, त्याची लांबी, रुंदीपेक्षां १० यार्डांनीं जास्ती होती, आणि त्याचें क्षेत्रफळ ३००० चौरस यार्ड होतें; तर त्याची लांबी आणि रुंदी किती किती यार्ड होती?

उत्तर. ६० यार्ड आणि ५० यार्ड.

१० **अ** आणि **ब** ह्या दोघां सरकत्यांस व्यापारांत १८ पौंड नफा झाला; **ब**नें आपले ३० पौंड १६ महिनेपर्यंत व्यापारांत ठेविले होते, आणि **अ**नें आपला पैसा १२ महिनेपर्यंत ठेविला होता आणि बारा महिन्याचे अंतीं त्यास नफा व मुद्दल मिळून २६ पौंड आले; तर **अ**नें व्यापारांत किती पैसा घातला होता?

उत्तर. २० पौंड

११. चौरस फूट अशा दगडांनीं बांधलेल्या दोन चौरस फरसबंद्या आहेत, त्यांपैकीं एकीची बाजू दुसरीचे बाजूपेक्षां १२ फूट अधिक आहे, आणि त्या दोन्ही फरसबंद्यांस मिळून २१२० दगड लागतात; तर एकेकीच्या बाजूची लांबी किती होती?

उत्तर. २६ फूट, आणि ३८ फूट.

१२. एकानें आपला घोडा ५६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यास मूळ किंमती इतका दरशेंकडा नफा झाला; तर त्यानें घोडा केवढ्याला घेतला होता?

उत्तर. ४० रुपये.

१३. दोन संख्यांची वजाबाकी ६ आहे, आणि त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेस त्यांच्या गुणाकारानें गुणलें असतां गुणाकार ४६४० आहे; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. १०, आणि ४.

१४. १५० मैलांवर एक गांव आहे, त्या गांवास जाण्याकरितां अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस निघतात; परंतु ब पेक्षां अ दरतासास ३ मैल जास्ती चालतो, म्हणून तो त्याच्या अगोदर ८$\frac{1}{3}$ तास त्या गांवीं पोंहचतो. तर दरतासास एकेक किती

मैल चालतो? उत्तर. अ, ९, आणि ब, ६.

१५. एका गड्याचे हाताखालीं एक मुलगा जर ६ तास दिला तर तो कांहीं एक काम १० तासांत संपवितो; परंतु मुलाला जर १० तास काम करायाला लाविलें आणि गड्याला ६च तास लाविलें, तर त्या कामाचें $\frac{३}{५}$ मात्र काम होतें; आतां गडी मुलापेक्षां ५ तास जास्ती खपतो आहे, तर त्या दोघांस तें काम संपविण्यास किती वेळ लागेल?

उत्तर. गडी, १०$\frac{१}{१०}$ तास; आणि मुलगा ५$\frac{१}{१०}$ तास.

१६. कोणीएक नावाडी १० तासांत २० मैलांवर होडी नेऊन परत आणतो, आणि हें कृत्य केल्यावरून त्यास असें कळून येतें कीं, पाठीवरची भरती असतां ३ मैल जाण्यास जितका वेळ लागतो तितकाच वेळ समोरची भरती असतां २ मैल यावयास लागतो; तर त्या पाण्याचा जोर किती आहे, आणि त्यास जाण्यास आणि येण्यास किती वेळ लागतो?

उत्तर. { दर तासांत $\frac{५}{६}$ मैल, आणि जाण्याचा वेळ ४ तास, आणि येण्याचा वेळ ६ तास.

१७. एक पोकळ समबाजू त्रिकोणाकृतींत तीन तीन

रांगा धरून उभी राहण्यापुरती फौज आहे, आणि जर त्यांतून ५९७ मनुष्यें काढून टाकिलीं तर बाकीच्या मनुष्यांनीं चारचार रांगांचें एक पोकळ चौरस होईल, ज्या चौरसाच्या पुढल्या एका रांगेंतील मनुष्यसंख्या त्रिकोणाच्या पुढल्या एका रांगेंतील मनुष्यसंख्येचे वर्गमूळाहून एकानें अधिक आहे; तर त्या फौजेंत किती मनुष्यें आहेत?

उत्तर. ६९३ मनुष्यें.

१८. १०० पौंड भांडवल घेऊन दोन सावकारांनीं सरकतीनें व्यापार आरंभिला; एकानें आपला पैसा तीन महिने व्यापारांत ठेविला, आणि दुसऱ्यानें २च महिने ठेविला; आणि एकेकास नफा व मुद्दल मिळून ९९ पौंड आले; तर एकेकाचा पैसा किती किती होता?

उत्तर. ४५ पौंड, आणि ५५ पौंड.

१९. पायदळाच्या दोन तुकड्यांस ३९ मैलांवर जाऊन छावणी करण्याचा हुकूम झाला; त्या दोन्ही तुकड्यांनीं एकाच वेळेस कूच केलें, परंतु एक दुसरीपेक्षां $\frac{1}{4}$ मैल दरतासास जास्ती चालली, म्हणून ती एक तास अगोदर जाऊन पोंहचली; तर एकेक तुकडी दरतासांत किती मैल चालली?

उत्तर. दर तासांस अनुक्रमें ३ आणि ३½ मैल.

२०. एका कलालानें क्लारेट दारूचे १२ डजन आणि शेरी दारूचे ७ डजन ५० पौंडांस विकले; त्यानें ६ पौंडास जितके डजन क्लारेट दारूचे विकले त्यापेक्षां १० पौंडांस शेरी दारूचे ३ डजन जास्ती विकले; तर प्रत्येक दारवेच्या प्रत्येक डजनास काय पडलें?

उ० शेरीच्या दर डजनास २ पौंड, आणि क्लारेटच्यास ३ पौंड.

२१. काटकोन चौकोन बांधून उभ्या राहिलेल्या सैन्याच्या **अ** आणि **ब** ह्या दोन तुकड्यांतील प्रत्येकींत जेव्हां समोरल्या रांगेंतील मनुष्यांइतकींच बाजूंचे रांगेंत मनुष्यें होतीं, तेव्हां त्या दोन्हींच्या समोरल्या रांगांतील एकंदर मनुष्यें ८४ होतीं; पण जेव्हां **अ**च्या समोरल्या रांगेंतील मनुष्यांइतकीं **ब**चे समोरील रांगेंत, आणि **ब**च्या समोरील रांगेंतील मनुष्यांइतकीं **अ**चे समोरील रांगेंत मनुष्यें ठेवलीं, तेव्हां दोघींच्या बाजूंचे रांगांतील एकंदर मनुष्यें ९१ होतीं; तर प्रत्येक तुकडींत किती किती मनुष्यें होतीं?

उत्तर. २३०४, आणि १२९६.

२२. **अ** आणि **ब** ह्या दोघांनीं मिळून सरकतीनें

व्यापार आरंभिला; कांहीं दिवसांनीं अनें आपला हिस्सा ११ पोंडांस विकला, त्यांत त्याला बच्या हिशा इतका दर शेकडा नफा झाला; बस ७६ पोंड नफा झाला, आणि तेव्हां असें दिसून आलें कीं, बस जितका दर शेंकडा नफा पडला त्याच्या चौपट अस दर शेंकडा पडला; तर एकेकानें किती किती पोंड व्यापारांत घातले होते?

उत्तर. अचा पैसा ५ पोंड, आणि बचा १२० पोंड.

२३. सैन्याची एक तुकडी काटकोनचौकोन बांधून मजल दरमजल चालली होती, तेव्हां तिचे समोरल्या रांगेंतील माणसांपेक्षां बाजूच्या रांगेंत पांच माणसें जास्ती होतीं; परंतु जेव्हां शत्रु दिसूं लागला तेव्हां पाठीमागील मनुष्यें घेऊन समोरल्या रांगेंत ८४५ मनुष्यें जास्ती उभीं केलीं, म्हणून त्यांत पांचच रांगा झाल्या; तर त्या तुकडींत किती मनुष्यें होतीं?

उत्तर. ४५५० मनुष्यें.

२४. एका द्राक्षांचे दारूच्या आणि सिदर दारूच्या मिश्रणांत द्राक्षांची दारू त्या मिश्रणाचे अर्धाहून २५ शेर अधिक होती, आणि सिदर दारू त्या मिश्रणाचे

तृत यांशाहून पांच शेर कमी होती; तर त्या मिश्रणां त एकेक दारवेचे किती किती शेर होते?

उत्तर. | द्राक्षांच्या दारूचे ८५शेर आणि
| मिदर दारूचे ३५ शेर.

२५ एका काटकोनत्रिकोणांत पायाची आणि कर्णाची वजाबाकी ६ आहे, आणि लंबाची आणि कर्णाची वजाबाकी ३ आहे; तर त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू काय आहेत?

उत्तर. १५, १२, आणि ९.

२६. दोन आंकड्यांची अशी संख्या कोणती आहे, कीं जीस तिचे डावे हातचे आंकड्यानें गुणिलें असतां गुणाकार ४६ येईल, आणि त्या दोन आंकड्यांच्या बेरजेस त्याच आंकड्यानें गुणिलें असतां गुणाकार १० येईल.

उत्तर ३.

२७. अ आणि ब ह्यांस सरकतीच्या व्यापारांत १०० पौंड नफा झाला; अचें अर्धें भांडवल बच्या भांडवलापेक्षां १०० पौंड कमी होतें, आणि अस बच्या भांडवलाचे $\frac{3}{20}$ सांश इतका नफा झाला; तर एकेकाचें भांडवल किती किती होतें, आणि एकेकास

किती किती नफा झाला?

उत्तर. { अचें भांडवल ६००, आणि बचें ४०० पौंड.
अचा नफा ६०, आणि बचा ४० पौंड.

२८. ३२० मैल अंतरावरील दोन गांवांहून दोन मित्र अ आणि ब एकमेकांस भेटावयास एकाच काळीं निघाले; अ, ब पेक्षां ८ मैल दररोज अधिक चालला, आणि ब एके दिवसांत जितके मैल चालला त्याच्या अर्ध दिवस एकमेकांची गांठ पडावयास लागले, तर एकेक दररोज किती मैल चालला, आणि एकंदर किती मैल चालला?

उत्तर. { दररोज अ २४ मैल, ब १६ मैल गेला;
अ एकंदर १९२ मैल. ब १२८ मैल गेला.

२९. दोन चौकोनी भांडीं आहेत, त्यांपैकीं मोठ्याचें घनफळ धाकट्याचे घनफळापेक्षां २० घनफुटांनीं अधिक आहे. भांड्यांचीं बुडें चौरस आहेत, व प्रत्येक भांड्याच्या बुडाची लांबी दुसऱ्या भांड्याच्या उंची इतकी आहे, आणि त्यांचीं मांडवणें ४ : ५ ह्या प्रमाणांत आहेत; तर एकेका भांड्याची उंची किती आहे?

उत्तर. ५ फूट, आणि ४ फूट.

३०. अ, ब, आणि क, हे तीन मित्र आपापसांत कांहीं पैसा वांटून घेतात; अ आपणास सगळ्या पैशांतून नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो, ब बाकीच्या पैशांतून नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो, आणि क शेष राहिलेल्या पैशाचा नवा भाग आणि $\frac{अ}{न}$ इतकें घेतो; आणि शेवटीं पाहातात तों कांहींच पैसा उरत नाहीं; तर तो पैसा किती आहे?

उत्तर. $\frac{3न^2-3न+1}{(न-1)^3}\times अ$ पौंड.

३१ दोन गांवांचेमध्यें अंतर अमैल आहे, एके गांवाहून एक मनुष्य निघाला, तो पहिल्या दिवशीं सगळ्या रस्त्याचा मवा भाग चालून गेला, दुसरे दिवशीं बाकीच्या रस्त्याचा नवा भाग चालून गेला, नंतर पुढें शेष रस्त्याचे मवा आणि नवा भाग असा एकेक दिवसाआड चालत गेला, तर तो २प दिवसांत किती मैल लांब गेला?

उत्तर. $अ\left\{1-\left(1-\frac{1}{म}\right)^{प}\left(1-\frac{1}{न}\right)^{प}\right\}$.

प्रकरण ७.

असमपदें, गुणोत्तर, प्रमाण, आणि विकार

(१८). असमपदें > ह्याहून जास्ती, किंवा < ह्याहून कमी, ह्या चिन्हानें दाखवितात. जसें, ५>३, ३<५, आणि अ>ब, हीं असमपदें आहेत. जेव्हां सर्व पदांचीं चिन्हें बदलतात तेव्हां > ह्या चिन्हाचें < हें चिन्ह होतें, आणि < ह्या चिन्हाचें > हें चिन्ह होतें, एवढी गोष्ट शिवाय करून असमपदांचीं उदाहरणें समीकरणांप्रमाणेंच करतां येतात; आणि ह्या अपवादाचें कारण असें आहे, कीं जरी अ > ब असला तरी −अ > −ब असेलच असा नियम नाहीं, ह्यास उदाहरण, ५>३, परंतु −५<−३.

उदाहरणें.

१. म आणि न हीं दोन असमपदें आहेत असें मान, तर $म^{२}+न^{२} > २मन$.

कांकीं ∵ कोणतेंही वर्गपद ऋण असावयाचें नाहीं, ∴ $(म-न)^{२}$ म्हणजे $म^{२}+न^{२}-२मन$, हें पद धन आहे,

∴ ह्या पदांमधील धन भाग > ऋण भाग; म्हणजे,

$म^२ + न^२ > २मन$.

२. असें सिद्ध करा कीं, $\sqrt{११} + \sqrt{७} > \sqrt{१९} + \sqrt{२}$.

ज्याप्रमाणें, $\sqrt{११} + \sqrt{७}$ > किंवा < $\sqrt{१९} + \sqrt{२}$,

त्याप्रमाणें, $(\sqrt{११} + \sqrt{७})^२$ > किंवा < $(\sqrt{१९} + \sqrt{२})^२$,

म्हणजे, $१८ + २\sqrt{७७}$ > किंवा < $२१ + २\sqrt{३८}$,

$२\sqrt{७७}$ > किंवा < $३ + २\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूंन १८ वजा केल्यानें,

∴ ३०८ > किंवा < $१६१ + १२\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूचा वर्ग केल्यानें,

∴ १४७ > किंवा < $१२\sqrt{३८}$, ∵ प्रत्येक बाजूंन १६१ वजा केल्यानें,

आतां हें उघड आहे कीं, १४७ हे $१२\sqrt{३८}$ ह्यां पेक्षां अधिक आहेत;

∴ $\sqrt{११} + \sqrt{७}$ हे $\sqrt{१९} + \sqrt{२}$ ह्यां पेक्षां अधिक आहेत.

३. असें सिद्ध करा कीं, अपूर्णपद + त्याचा व्युत्क्रम > २.

$\frac{म}{न}$ हें अपूर्ण पद घे, तर $\frac{न}{म}$ हें त्याचा व्युत्क्रम आहे.

आतां ज्याप्रमाणें $\frac{म}{न} + \frac{न}{म}$ > किंवा < २,

त्याप्रमाणें $\left(\frac{म}{न}+\frac{न}{म}\right)^२ >$ किंवा $< २^२$,

म्हणजे $\frac{म^२}{न^२}+२+\frac{न^२}{म^२} >$ किंवा < ४,

$\frac{म^२}{न^२}+\frac{न^२}{म^२} >$ किंवा < २, ∵ २ वजा केल्यानें,

परंतु ∵ $२\frac{म}{न}\cdot\frac{न}{म}=२$, ∴ $\frac{म^२}{न^२}+\frac{न^२}{म^२}>२$, (१ उदा०)

$$\therefore \frac{म}{न}+\frac{न}{म} > २.$$

४. जर, $य=१+४क्ष-क्ष^२$, तर क्षची कोणती किंमत धरली असतां य अतिमोठा होईल?

$क्ष^२-४क्ष=१-य$, $क्ष^२-४क्ष+४=५-य$,

∴ $क्ष-२=\pm\sqrt{५-य}$, ∴ $क्ष=२\pm\sqrt{५-य}$.

उत्तर. क्ष=२ असलें पाहिजेत, आणि मग य=५ होतील; कांकीं, जेव्हां य > ५, तेव्हां वर काढलेली क्षची किंमत, म्हणजे $२\pm\sqrt{५-य}$, ही कल्पित होते; आणि जेव्हां यची किंमत=५ आहे, तेव्हां $\pm\sqrt{५-य}$ हें पद शून्य होतें. आणि क्ष=२.

५. $\sqrt{७}+\sqrt{१०}$, आणि $\sqrt{३}+\sqrt{१९}$, ह्या दोन पदांत कोणतें मोठें आहे? उत्तर. $\sqrt{३}+\sqrt{१९}$.

६. $४क्ष - ७ < २क्ष + ३$,
आणि $३क्ष + १ > १३ - क्ष$, } तर क्षची पूर्णांक किंमत काढ.

उत्तर. क्ष = ४.

७. असें सिद्ध कर कीं $\frac{अ+ब}{२} > \frac{२अब}{अ+ब}$, आणि $अ^३ + ब^३ > अ^२ब + अब^२$.

८. असें सिद्ध कर कीं $\frac{न^२ - न + १}{न^२ + न + १}$ ह्या पदाची किंमत, नची कोणतीही किंमत असल्या तरी, ३ आणि $\frac{१}{३}$ ह्यांच्या मध्यें आहे.

गुणोत्तर.

(१०). दोन पदांच्या किंवा दोन संख्यांच्या मध्यें महत्त्वमूलक जो संबंध असतो त्यास **गुणोत्तर** म्हणतात; जसें १२ हे ४ ह्यांचे तिप्पट आहेत, आणि १२ ह्यांचे ४ ह्यांशीं जें गुणोत्तर तें ३ आहे. हें गुणोत्तर लिहिण्याची रीति १२ : ४ अशी आहे; गुणोत्तराचा पहिला अवयव १२ ह्यास **अग्रसर** म्हणतात, आणि दुसरा अवयव ४ ह्यास **उपाग्रसर** म्हणतात.

हें गुणोत्तर $\frac{१२}{४}$ ह्या अपूर्णांकानें ही दाखवितात।

येईल, $\therefore \frac{१२}{४} = ३$.

ह्याप्रमाणेंच १२ : ३६ हें गुणोत्तर $= \frac{१२}{३६} = \frac{१}{३}$ आणि सामान्येंकरून अ : ब ह्या गुणोत्तराची किंमत $\frac{अ}{ब}$ ह्या अपूर्णपदानें दाखविता येईल.

एकाच पदानें गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांस गुणिलें अथवा भागिलें तर त्याची किंमत बदलत नाहीं. कांकीं, अ : ब $= \frac{अ}{ब} = \frac{नअ}{नब}$. $\therefore$ अ : ब = नअ : नब.

गुणोत्तरांत अग्रसर उपाग्रसरापेक्षां **अधिक** किंवा **कमी** किंवा त्याजबरोबर असेल, त्याप्रमाणें त्यास **अधिक असाम्याचें**, **कमी असाम्याचें**, किंवा **साम्याचें** गुणोत्तर म्हणतात.

एकच पद अधिक असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांत मिळविलें तर तें गुणोत्तर कमी होतें, आणि कमी असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांत मिळविलें तर तें गुणोत्तर अधिक होतें.

जर अ : ब हें एक मूळचें गुणोत्तर घेऊन त्याचे दोन्ही पदांत क्ष मिळविला, तर अ+क्ष : ब+क्ष हें नवें गुणोत्तर होईल.

∴ ज्या प्रमाणें $\frac{अब+बक्ष}{ब(ब+क्ष)}$ > किंवा < $\frac{अब+अक्ष}{ब(ब+क्ष)}$, ∵ दोनही गुणोत्तरांस समच्छेद केल्यानें.

∴ प्रमाणें $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$,

∴ त्या प्रमाणें अब + बक्ष > किंवा < अब + अक्ष,

अथवा , बक्ष > किंवा < अक्ष ,

अथवा , ब > किंवा < अ , (१८ कलमाप्रमाणें.)

त्याप्रमाणें, $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$; म्हणजे,

जर अ > ब, तर $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} < \frac{अ}{ब}$, म्हणजे तें गुणोत्तर कमी झालें ;

जर अ < ब, तर $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} > \frac{अ}{ब}$, म्हणजे तें गुणोत्तर वाढलें.

एकच पद अधिक असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर तें गुणोत्तर अधिक होतें, आणि कमी असाम्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर तें गुणोत्तर कमी होतें.

अ आणि ब ह्या दोन्ही पदांपेक्षां कमी जें पद क्ष तें त्या प्रत्येकांतून वजा केलें तर पहिलें गुणोत्तर = $\frac{अ}{ब}$,

आणि नवें गुणोत्तर= $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष}$

त्याप्रमाणें $\frac{अब-बक्ष}{ब(ब-क्ष)}$ > किंवा < $\frac{अब-अक्ष}{(ब-क्ष)ब}$;

म्हणजे अब-बक्ष > किंवा < अब-अक्ष

त्याप्रमाणें $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$;

(१) ह्या असाम्यांतील ऋण पदें उडविण्याकरितां त्यांत अक्ष+बक्ष मिळीव, म्हणजे

जसें अब- बक्ष+ अक्ष+बक्ष > किंवा

< अब-अक्ष+अक्ष+बक्ष,

अथवा अब+अक्ष > किंवा < अब+बक्ष,

अथवा अक्ष > किंवा < बक्ष; अथवा अ > किंवा < ब,

तसें $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष}$ > किंवा < $\frac{अ}{ब}$, हें मागल्याचें उलट आहे; म्हणजे,

जर अ > ब, तर $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष} > \frac{अ}{ब}$, म्हणजे गुणोत्तर वाढलें,

जर अ < ब, तर $\frac{अ-क्ष}{ब-क्ष} < \frac{अ}{ब}$, म्हणजे गुणोत्तर कमी झालें.

अ : ब आणि क : ड ह्या दोन गुणोत्तरांच्या अग्रसरांचा आणि उपाग्रसरांचा परस्पर गुणाकार घेतला, तर आलेल्या अक : बड ह्या नवीन गुणोत्तरास पहिल्या दोन गुणोत्तरांचें **संयुक्तगुणोत्तर** म्हणतात.

$अ^{२} : ब^{२}$ ह्या गुणोत्तरास अ : ब ह्या गुणोत्तराचा **वर्ग** म्हणतात.

$\sqrt{अ} : \sqrt{ब}$	**वर्गमूळ**....
$अ^{३} : ब^{३}$	**घन**....
$\sqrt[३]{अ} : \sqrt[३]{ब}$	**घनमूळ**....
इत्यादि.	इत्यादि.

प्रमाण.

(२०). ज्यांचीं गुणोत्तरें बरोबर असतात तीं पदें **प्रमाणांत** असतात. म्हणजे जर अ : ब हें गुणोत्तर क : ड ह्या गुणोत्तराबरोबर आहे, म्हणजे $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ तर अ, ब, क, आणि ड हीं चार पदें **प्रमाणांत** आहेत असें म्हणतात; आणि अ : ब : : क : ड, अथवा अ : ब = क : ड ह्यास **प्रमाण** म्हणतात.

सिद्धांत.

१. जर चार पदें प्रमाणांत आहेत; तर **आद्यं-तपदांचा** गुणाकार **मध्यपदांच्या** गुणाकाराबरा-बर आहे.

अ : ब : : क : ड हें एक प्रमाण घे, तर $\frac{अ}{ब}$ $= \frac{क}{ड}$, आणि ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस डब नें गुणल्यानें, अड = कब.

कुरल० १ जर अ : ब : : ब : क, तर $ब^{2}$ = अक, आणि ब = $\sqrt{अक}$. ह्यांत ब ह्यास अ आणि क ह्यांचें **मध्यप्रमाण** म्हणतात. ह्यावरून हें सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही दोन पदांचें मध्यप्रमाण त्या दोन पदांचे गुणाकाराचे वर्गमुळाबरोबर असतें.

कुर० २. ∵ अड = बक, ∴ अ = $\frac{बक}{ड}$, ब = $\frac{अड}{क}$, क = $\frac{अड}{ब}$, ड = $\frac{बक}{अ}$; ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं जर प्रमाणांतील **तीन** पदें दिलीं आहेत तर, चवथें पद काढतां येईल. पूर्णांकांतील त्रैराशि-काची रीति ह्यावरूनच निघाली आहे.

२. जर दोन पदांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन पदां-

च्या गुणाकाराबरोबर आहे, तर एके गुणाकाराचे अवयव आद्यंत पदें केली, आणि दुसरे गुणाकाराचे अवयव मध्यपदें केली तर तीं चार पदें प्रमाणांत होतील.

न क्ष = म य घे, तर प्रत्येक बाजूस नयनें भागल्यानें,

$\frac{क्ष}{य} = \frac{म}{न}$, ∴ क्ष : य : : म : न.

३. जर अ : ब : : क : ड, आणि क : ड : : म : न, तर अ : ब : : म : न. (युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत ४.)

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, आणि $\frac{क}{ड} = \frac{म}{न}$, ∴ $\frac{अ}{ब} = \frac{म}{न}$,

∴ अ : ब : : म : न.

४. जर अ : ब : : क : ड, तर ब : अ : : ड : क. युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत ६.)

कारण, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, ∴ $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$, ∴ ब : अ : : ड : क.

त्या कृत्यास व्यस्तीकरण म्हणतात.

५. अ : ब : : क : ड, तर अ : क : : ब : ड. (युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत ५.)

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, आणि $\frac{ब}{क}$ नें गुणिल्यानें,

$\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$, ∴ अ : क : : ब : ड.

त्यास परावर्तन म्हणतात.

६. जर अ:ब::क:ड, तर अ+ब:ब::क+ड:ड. (युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत १७.)

कारण $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$, आणि प्रत्येक बाजूंत १ मिळविल्यानें,

$$\frac{अ}{ब}+१=\frac{क}{ड}+१, \therefore \frac{अ+ब}{ब}=\frac{क+ड}{ड},$$

$$\therefore अ+ब : ब :: क+ड : ड.$$

त्यास मिश्रीकरण म्हणतात.

७. जर अ:ब::क:ड, तर अ−ब:ब::क−ड:ड. (युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत ८.)

कारण $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$, $\therefore \frac{अ}{ब}-१=\frac{क}{ड}-१$,

$$\therefore \frac{अ-ब}{ब}=\frac{क-ड}{ड}, \therefore अ-ब : ब :: क-ड : ड.$$

त्यास विभागीकरण म्हणतात.

८. जर अ:ब::क:ड, तर अ−ब:अ::क−ड:ड, आणि अ:अ−ब::क:क−ड. (युक्लिड, ५वें बूक, सिद्धांत ९.)

कारण ७सि॰प्र॰ $\frac{अ-ब}{ब}=\frac{क-ड}{ड}$,

आणि ५ सि० प्र० $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$,

$\therefore \frac{अ-ब}{ब} \times \frac{ब}{अ} = \frac{क-ड}{ड} \times \frac{ड}{क}$,

$\frac{अ-ब}{अ} = \frac{क-ड}{क}$, $\therefore$ अ−ब : अ : : क−ड : क,

आणि अ : अ−ब : : क : क−ड, $\because$ व्यस्तीकरणानें.

९. जर अ : ब : : क : ड, तर

अ+ब : अ−ब : : क+ड : क−ड, (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत ८ कुरल०)

कारण $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$, $\because$ ६ सि० प्र०

आणि $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$, $\because$ ७ सि० प्र०

$\therefore \frac{अ+ब}{ब} \div \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड} \div \frac{क-ड}{ड}$

$\therefore \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{क-ड}$, $\therefore$ अ+ब : अ−ब : : क+ड : क−ड.

१०. जर अ : ब : : क : ड : : इ : फ, तर

अ : ब : : अ+क+इ+इ० : ब+ड+फ+इ० (युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १४.)

$\because \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \therefore अड = बक, \because \frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}, \therefore अफ = बइ,$

आणि $अब = अब$

$\therefore$ बेरजेनें, $अब + अड + अफ = अब + बक + बइ.$

$अ(ब + ड + फ) = ब(अ + क + इ);$

$\therefore$ (सि॰ अ॰), $अ : ब :: अ + क + इ : ब + ड + फ$

आणि जेव्हां ह्यांहून अधिक पदें घेतलीं आहेत तेव्हां हा असाप्रमाणच [illegible].

११. जर $अ : ब :: क : ड$, तर $मअ : मब :: \frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$.

आणि $मअ : \frac{ब}{न} :: मक : \frac{ड}{न}$.

कारण $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore$ (९ कल॰ प्र॰) $\frac{मअ}{मब} = \frac{\frac{क}{न}}{\frac{ड}{न}}$,

$\therefore मअ : मब :: \frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$.

पुनः, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \therefore \frac{मअ}{ब} = \frac{मक}{ड}, \frac{मअ}{\frac{ब}{न}} = \frac{मक}{\frac{ड}{न}},$

$मअ : \frac{ब}{न} :: मक : \frac{ड}{न}$.

१२. $\left.\begin{matrix} जर\ अ : ब :: क : ड \\ आणि\ इ : फ :: ग : ह \end{matrix}\right\}$, तर $अइ : बफ :: कग : डह$.

कारण $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{क}}{\text{ड}}$, $\frac{\text{इ}}{\text{फ}}=\frac{\text{ग}}{\text{ह}}$, ∴ गुणाकारानें, $\frac{\text{अइ}}{\text{बफ}}=\frac{\text{कग}}{\text{डह}}$,

∴ अइ : बफ :: कग : डह.

आणखी कितीही जरी प्रमाणें असलीं तरीही ह्याप्रमाणेंच जाणावें.

१३. जर अ : ब :: क : ड, तर $\text{अ}^{\text{न}}:\text{ब}^{\text{न}}::\text{क}^{\text{न}}:\text{ड}^{\text{न}}$,

जेथें न ही पूर्ण संख्या असो किंवा अपूर्ण संख्या असो.

(युक्लिड, ५ वें बूक, सि० २२.)

कारण $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{क}}{\text{ड}}$, ∴ $\frac{\text{अ}^{\text{न}}}{\text{ब}^{\text{न}}}=\frac{\text{क}^{\text{न}}}{\text{ड}^{\text{न}}}$ ∴ $\text{अ}^{\text{न}}:\text{ब}^{\text{न}}::\text{क}^{\text{न}}:\text{ड}^{\text{न}}$.

१४. जर अ : ब :: ब : क, तर अ : क :: $\text{अ}^{२}:\text{ब}^{२}$.

(युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १९.)

कारण $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ ∴ $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times\frac{\text{ब}}{\text{क}}=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{अ}^{२}}{\text{ब}^{२}}$,

∴ अ : क :: $\text{अ}^{२}:\text{ब}^{२}$.

१५. जर अ : ब :: ब : क :: क : ड, तर अ : ड :: $\text{अ}^{३}:\text{ब}^{३}$.

(युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १६.)

कारण $\frac{\text{अ}}{\text{ड}}=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times\frac{\text{ब}}{\text{क}}\times\frac{\text{क}}{\text{ड}}$, आणि $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{ब}}{\text{क}}=\frac{\text{क}}{\text{ड}}$,

$\therefore \frac{अ}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अ^3}{ब^3}$, $\therefore$ अ : ड : : $अ^3$: $ब^3$.

ह्या सिद्धांतांत आणि मागील सिद्धांतांत, दिलेलीं पदें अखंड प्रमाणांत आहेत.

विकार

(२१). दोन पदांत जेव्हां परस्परें असा संबंध असतो, कीं एकांत कांहीं फेरफार झाला असतां त्याच प्रमाणानें दुसऱ्यांतही फेरफार होतो, तेव्हां तीं दोन पदें परस्पर समविकार पावतात असें म्हणतात.

मनांत आण कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परें असा संबंध आहे कीं अची किंमत जर अ' झाली तर बची किंमत ब' ही अशी होते, कीं अ : अ' : : ब : ब'; तर अ, ब प्रमाणेंच समविकृत होतो, म्हणजे, अ ∝ ब.

ह्यास उदाहरण, एका त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ दाखवायास △ हें चिन्ह घे, पायाची लांबी दाखवायास प घे, आणि लंबाची उंची दाखवायास ल घे; तर ल जर नियमित आहे तर △ ∝ प. (युक्लिड, ६ वें बूक, सिद्धांत १.)

मनांत आण, कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परें असा संबंध आहे कीं अची किंमत अ' झाली असतां बची किंमत ब' ही अशी होते कीं अ : अ' :: $\frac{१}{ब}$: $\frac{१}{ब'}$; तर अ, बप्रमाणेंच व्यस्तविकृत होतो. म्हणजे अ ∝ $\frac{१}{ब}$.

वरचे प्रमाणेंच त्रिकोणाचीं तींच परिमाणें दाखवायास △, प, आणि ल घे, तर △ = $\frac{१}{२}$ पल. (युक्लिड, १ लें बूक, सिद्धांत ४१.); आणि जर △ नियमित आहे, आणि प जर वाढत आहे तर लस त्याप्रमाणानेंच कमी होत गेलें पाहिजे, म्हणजे जर पची किंमत मप झाली तर लची किंमत $\frac{ल}{म}$ होईल, ∴ ल प्रमाणेंच प व्यस्तविकृत होतो, म्हणजे प ∝ $\frac{१}{ल}$.

सिद्धांत. अ जर ब प्रमाणेंच विकृत होत आहे तर अ, त्याची किंमत नियमित आहे अशा पदानें बस गुणून जो गुणाकार त्याबरोबर आहे.

कांकीं, ∵ अ : अ' :: ब : ब', ∴ अ : अ' :: मब : मब',
∴ परावर्तनानें अ : मब :: अ' : मब'; म्हणून म जर असा घेतला कीं अ = मब, तर सर्वदां अ' = मब'.

ह्याची उलट, जर अ = मब, आणि मची किंमत नियमित आहे, तर अ ∝ ब

*** विकाराचें समीकरण करतां येतें, म्हणून हा सिद्धांत ह्या विषयांत बहुत उपयोगी आहे.

असम पदांचीं, गुणोत्तरांचीं, प्रमाणांचीं आणि विकारांचीं उदाहरणें.

१. १५:१७ आणि १७:१९ ह्या गुणोत्तरांत कोणतें गुणोत्तर मोठें आहे?

$$\left.\begin{aligned}\frac{१५}{१७} &= \frac{१५}{१७}\times\frac{१९}{१९} = \frac{२८५}{३२३}\\ \frac{१७}{१९} &= \frac{१७}{१९}\times\frac{१७}{१७} = \frac{२८९}{३२३}\end{aligned}\right\} \therefore १७ \div १९ \text{ हें मोठें आहे.}$$

२. असें सिद्ध करा कीं $अ^३+ब^३ : अ^२+ब^२$ हें गुणोत्तर $अ^२+ब^२ : अ+ब$ ह्या गुणोत्तरापेक्षां अधिक आहे.

$$\frac{अ^३+ब^३}{अ^२+ब^२} = \frac{अ^३+ब^३}{अ^२+ब^२}\times\frac{अ+ब}{अ+ब} = \frac{अ^४+अ^३ब+अब^३+ब^४}{(अ^२+ब^२)(अ+ब)},$$

$$\frac{अ^२+ब^२}{अ+ब} = \frac{अ^२+ब^२}{अ+ब}\times\frac{अ^२+ब^२}{अ^२+ब^२} = \frac{अ^४+२अ^२ब^२+ब^४}{(अ^२+ब^२)(अ+ब)},$$

∴ जसें $अ^३ब+अब^३ >$ किंवा $< २अ^२ब^२$,

म्हणजे $अ^२+ब^२ >$ किंवा $< २अब$,

तसें $अ^३+ब^३ : अ^२+ब^२ >$ किंवा $< अ^२+ब^२ : अ+ब$.

परंतु (कलम १८, उदा० १ प्र०) $अ^{२}+ब^{२} > २अब$,

$\therefore अ^{३}+ब^{३} : अ^{२}+ब^{२} > अ^{२}+ब^{२} : अ+ब$.

३. जर क्ष : य हें अ : ब ह्या गुणोत्तराचा वर्ग आहे, आणि अ : ब हें अ+क्ष : क्ष−य ह्या गुणोत्तराचें वर्गमूळ आहे, तर २क्ष : अ : : क्ष−य : य.

$क्ष : य : : अ^{२} : ब^{२} \ldots\ldots (१) \therefore \frac{क्ष}{य} = \frac{अ^{२}}{ब^{२}}$,

$\sqrt{अ+क्ष} : \sqrt{अ-य} : : अ : ब, \ldots (२) \therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{अ^{२}}{ब^{२}}$,

$\therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{क्ष}{य}$, $\therefore अ+क्ष : अ-य : : क्ष : य$.

(कल० २) विभागीकरणानें, $क्ष+य : अ-य : : क्ष-य : य$,

परावर्तनानें, $क्ष+य : क्ष-य : : अ-य : य$,

मिश्रीकरणानें, $२क्ष : क्ष-य : : अ : य$,

$\therefore$ परावर्तनानें, $२क्ष : अ : : क्ष-य : य$

४. जर $क्ष^{२}+य^{२} : क्षय : : १३ : ६$
आणि $क्ष^{२}-य^{२} = २०$ } तर $क्ष=६, य=४$.

(२० कलमाप्रमाणें) $क्ष^{२}+य^{२} : २क्षय : : १३ : १२$,

$क्ष^{२}+२क्षय+य^{२} : क्ष^{२}-२क्षय+य^{२} : : २५ : १$;

$क्ष+य : क्ष-य : : ५ : १$,

$$२क्ष : २य :: ६ : ४,$$

$$क्ष : य :: ३ : २,$$

$$\therefore क्ष = \frac{३}{२} य, \therefore \frac{९}{४} य^{२} - य^{२} = २०, \; ९य^{२} - ४य^{२} = ८०,$$

$$५य^{२} = ८०, \; \therefore य^{२} = १६, \; \therefore य = \pm ४;$$

$$क्ष = \frac{३}{२} य = \frac{३}{२} \times \pm ४ = \pm ६.$$

५. जर $य = प + क + र$, ज्यांत प ची किंमत नियमित आहे, आणि $क \propto क्ष$, आणि $र \propto \frac{१}{क्ष}$, आणि जर $क्ष = १, २, ३$, $य = ३, ५\frac{१}{२}, ७$; तर असें सिद्ध करा कीं $य = ५ + क्ष - \frac{३}{क्ष}$.

$क = अक्ष$, $र = \frac{ब}{क्ष}$ घे. तर $य = प + अक्ष + \frac{ब}{क्ष}$,

पण जर $क्ष = १$, $य = ३$, तर $३ = प + अ + ब$ ...(१)

.... $क्ष = २$, $य = \frac{११}{२}$, $\frac{११}{२} = प + २अ + \frac{ब}{२}$ ...(२)

.... $क्ष = ३$, $य = ७$, $७ = प + ३अ + \frac{ब}{३}$ ...(३)

$(२) - (१)$, $\frac{५}{२} = अ - \frac{ब}{२}$,
$(३) - (२)$, $\frac{३}{२} = अ - \frac{ब}{६}$, } ह्यांची वजाबाकी घे

$$१ = -\frac{ब}{३}, \; \therefore ब = -३,$$

$$\frac{५}{२} = अ + \frac{३}{२}, \; \therefore अ = १,$$

$$३ = प + १ - ३, \therefore प = ५,$$

$$\therefore य = ५ + क्ष - \frac{३}{क्ष}.$$

६. जर $क्ष^२ = अ^२ + ब^२$, आणि $य^२ = क^२ + ड^२$, तर असें सिद्ध करा कीं क्षय, $अक + बड$ आणि $अड + बक$ ह्या दोन पदांतून प्रत्येकाहून मोठा आहे.

$$क्ष^२य^२ = अ^२क^२ + ब^२ड^२ + अ^२ड^२ + ब^२क^२,$$

$$= अ^२क^२ + २अकबड + ब^२ड^२ + अ^२ड^२ - २अडबक + ब^२क^२,$$

$$= (अक + बड)^२ + (अड - बक)^२,$$

$$\therefore क्षय = \sqrt{(अक + बड)^२ + (अड - बक)^२},$$

$$\therefore क्षय > अक + बड.$$

$$पुनः, क्ष^२य^२ = अ^२ड^२ + ब^२क^२ + अ^२क^२ + ब^२ड^२$$

$$= अ^२ड^२ + २अडबक + ब^२क^२ + अ^२क^२ - २अकबड + ब^२ड^२,$$

$$= (अड + बक)^२ + (अक - बड)^२,$$

$$\therefore क्षय = \sqrt{(अड + बक)^२ + (अक - बड)^२},$$

$$\therefore क्षय > अड + बक.$$

७. जर $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{क} = इ$, तर असें सिद्ध करा कीं

(१) $\frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^2+क^2+इ^2+इ०}{ब^2+ड^2+फ^2+इ०}}$, (२) $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ+नक+पइ+इ०}{मब+नड+पफ+इ०}$

(१) $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\therefore अड = बक$, $\therefore अ^2ड^2 = ब^2क^2$

$\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$, $\therefore अफ = बइ$, $\therefore अ^2फ^2 = ब^2इ^2$,

आणि $अ^2ब^2 = अ^2ब^2$;

$\therefore$ बेरजेनें, $अ^2ब^2 + अ^2ड^2 + अ^2फ^2 = अ^2ब^2 + ब^2क^2 + ब^2इ^2$,

$अ^2(ब^2 + ड^2 + फ^2) = ब^2(अ^2 + क^2 + इ^2)$,

$\therefore \frac{अ^2}{ब^2} = \frac{अ^2+क^2+इ^2}{ब^2+ड^2+फ^2}$ $\therefore \frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^2+क^2+इ^2+इ०}{ब^2+ड^2+फ^2+इ०}}$,

(२) $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$, $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$,

$अड = बक$ $अफ = बइ$,

$अमब = बमअ$, $अनड = बनक$, $अपफ = बपइ$,

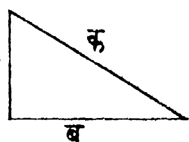
म्हणून, $अमब + अनड + अपफ = बमअ + बनक + बपइ$,

$अ(मब + नड + पफ) = ब(मअ + नक + पइ)$,

$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{मअ + नक + पइ + इ०}{मब + नड + पफ + इ०}$.

८. एका काटकोनत्रिकोणांत जसें म : न तशी दोन

बाजूंची बेरीज त्याचे कर्णास आहे, तर असें सिद्ध करतों, मची किंमत $न\sqrt{२}$ ह्यापेक्षां अधिक होणार नाही



दोन्ही बाजू दाखवा यास अ आणि ब, आणि कर्ण दाखवा यास क घे, तर $अ+ब . क :: म : न$,

(युक्लिड, १लें बूक, सि० ४७.) $अ^२+ब^२=क^२$,

$$\frac{अ+ब}{क}=\frac{म}{न}, \therefore अ+ब=क\frac{म}{न},$$

$$\left.\begin{array}{l} अ^२+२अब+ब^२=क^२\frac{म^२}{न^२} \\ २अ^२ \qquad +२ब^२=२क^२ \end{array}\right\} \text{वजाबाकी कर.}$$

$$अ^२-२अब+ब^२=२क^२-क^२\frac{म^२}{न^२}=\frac{क^२}{न^२}(२न^२-म^२),$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore अ-ब=\pm\frac{क}{न}\sqrt{२न^२-म^२} \\ अ+ब=\frac{क}{न}म \end{array}\right\} \text{बेरीज आणि वजाबाकी कर.}$$

$$\therefore २अ=\frac{क}{न}(म\pm\sqrt{२न^२-म^२}),$$

$$ब=\frac{क}{न}(म\mp\sqrt{२न^२-म^२}).$$

आतां जेव्हां $म^२>२न^२$, म्हणजे $म>न\sqrt{२}$ तेव्हां

२अ आणि २ब ह्यांच्या किंमती कल्पित होतात,

∴ म हा न√२ ह्यापेक्षां अधिक होणार नाहीं.

उदाहरणें

१. ३ : ७ आणि ४ : ९ ह्या दोन गुणोत्तरांतून कोणतें मोठें आहे? उत्तर. ४ : ९.

२. २ : ९ आणि १२ : ५ ह्या दोन गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर काय? उत्तर. ८ : १५.

३. म : ६क्ष^{2}, ३य^{2} : न, आणि क्ष^{2} : २य^{2}, ह्या तीन गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर काय?

उत्तर. म : ४न.

४. जर क्ष > य, तर (क्ष−य) आणि (क्ष^{2}−य^{2})^{2} ह्या दोहोंत मोठें कोणतें? उत्तर. क्ष−य.

५. जर अ ∝ ब, आणि ब ∝ क, तर असें दाखीव कीं अ ∝ क.

६. जर अ : ब :: क : ड, तर असें सिद्ध कर कीं

मअ ± नब : पअ ± कब :: मअ ± नड : पक ± कड.

७. जर क्ष = य + १२, आणि √क्षय : ४ :: ½(क्ष+य) : ५, तर असें दाखीव कीं क्ष = १६, आणि य = ४.

८ जर अ > ब, तर असें दाखवा कीं

$\sqrt{अ^{२} - ब^{२}} + \sqrt{अ^{२} - (अ - ब)^{२}} > अ$.

९ य $\propto$ क्ष, आणि जेव्हां क्ष = २, य = १०, तेव्हां असें सिद्ध कर कीं य = ५क्ष.

१० अशा दोन संख्या काढ कीं ज्या परस्परांस होतील जसें ३ : २, आणि ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्या गुणाकारानें गुणून जो गुणाकार येईल तो त्यांच्या वर्गांच्या वजाबाकीच्या बरोबर होईल.

उत्तर. ६ आणि ४.

११. $य^{२} \propto अ^{२} - क्ष^{२}$, असें घेऊन जेव्हां क्ष = ० तेव्हां य = ब असें मान; तर $य^{२} = \frac{ब^{२}}{अ^{२}}(अ^{२} - क्ष^{२})$.

१२. जर क्ष : य :: $अ^{३} : ब^{३}$, आणि $\sqrt[३]{क + क्ष} : \sqrt[३]{ड + य}$ :: अ : ब, तर असें सिद्ध कर कीं ड क्ष = क य.

१३. अखंड प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ कीं ज्यांची बेरीज ५२ येईल, आणि ज्यांच्या आद्यंत पदांची बेरीज : मध्यपद :: १० : ३. उत्तर. ४, १२, ३६.

प्रकरण ८

गणितश्रेढी

(२२). पदांचे ज्या श्रेढींतील पदें एकाच उत्तराने वाढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेढीस गणितश्रेढी म्हणतात. जसें १, ३, ५, ७, ९. ही गणितश्रेढ आहे. हिचें पहिलें पद १, शेवटील पद ९, उत्तर २ गच्छ ५, आणि सर्वधन २५ आहे. जर हीच श्रेढी ९, ७, ५, ३, १ अशी लिहिली, तर हिचें पहिलें पद ९, शेवटील पद १, आणि उत्तर −२, होईल.

सिद्धांत. कोणत्याही एकाद्या गणितश्रेढीचें न वें पद आणि सर्वधन काढावयाचें.

श्रेढीचें पहिलें पद दाखवायास अ, शेवटील किंवा नवें पद दाखवायास ल, उत्तर दाखवायास ड, गच्छ दाखवायास न, आणि सर्वधन दाखवायास स घे; तर ती श्रेढी अशी होईल

अ, (अ+ड), (अ+२ड), (अ+३ड), {अ+(न−१)ड}.

आतां ह्या श्रेढींतील कोणतेंही एकादें पद काढावयाचें आहे तर जितक्यावें पद काढावयाचें आहे त्या-

संख्येंत १ वजा करून बाकीनें उत्तरास गुणावें आणि तो गुणाकार पहिल्या पदांत मिळवावा म्हणजे झालें; आणि शेवटील पद ल = अ + (न − १) ड.

हीच श्रेणी उलटी लिहिली तर ती अशी होईल

$$ल, (ल - ड), (ल - २ड), (ल - ३ड) \cdots अ.$$

$$\therefore स = अ + (अ + ड) + (अ + २ड) + \cdots + (ल - २ड) + (ल - ड) + ल,$$

$$आणि\ स = ल + (ल - ड) + (ल - २ड) + \cdots + (अ + २ड) + (अ + ड) + अ,$$

$$\therefore २स = (ल + अ) + (ल + अ) + \cdots + (ल + अ) + (ल + अ) + (ल + अ),$$

$$= न\ वेळां\ (ल + अ),$$

$$\therefore २स = (ल + अ) \times न, \quad \therefore स = (ल + अ)\frac{न}{२}.$$

$$परंतु \because ल = अ + (न - १)ड, \therefore ल + अ = २अ + (न - १)ड,$$

$$\therefore स = \{२अ + (न - १)ड\}.\frac{न}{२} = नअ + \frac{न(न - १)ड}{२}.$$

दोन पदांचें **गणितमध्यप्रमाण** = त्या दोन पदांच्या बेरजेचें अर्ध; म्हणजे जर $म = \frac{अ + ब}{२}$ तर म हें अ आणि ब ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण आहे.

जेव्हां गणितश्रेणींतील गच्छ **विषम** आहे, तेव्हां मधलें पद = त्या पदापासून सारखें अंतरावर असणाऱ्या कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचें अर्ध.

उदाहरणें

१. २+५+८+ इत्यादि १७ पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचें सर्वधन काय आहे?

येथें अ=२, उ=३, न=१७,

$$\therefore स = नअ + \frac{न(न-१)उ}{२} = १७\times२ + \frac{१७\times१६\times३}{२}.$$

$$= ३४ + ४०८ = ४४२ \quad \text{उत्तर.}$$

२. $\frac{१}{२}+\frac{३}{८}+\frac{१}{४}+$ इ०, २० पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचें सर्वधन काय आहे?

येथें अ$=\frac{१}{२}$, उ$=-\frac{१}{८}$, न$=२०$,

$$\therefore स = नअ + \frac{न(न-१)उ}{२} = २०\times\frac{१}{२} + \frac{२०\times१९\times-\frac{१}{८}}{२},$$

$$= १० - \frac{९५}{४} = \frac{४०-९५}{४} = -\frac{५५}{४}\cdot \quad \text{उत्तर.}$$

३. एका गणितश्रेढीचें सर्वधन ९५०, उत्तर ३, आणि गच्छ २५ आहे; तर तिचें शेवटील पद काय आहे?

येथें स=९५०, उ=३, न=२५.

$$स = न.अ + \frac{न(न-१)उ}{२},$$

$$\therefore ९५० = २५अ + \frac{२५ \times २४ \times ३}{२} = २५अ + ९००,$$

$\therefore ५० = २५अ$, $\therefore अ = २$, पहिलें पद.

आतां $ल = अ + (न-१)ड = २ + २४ \times ३ = ७४$ उत्तर.

४. १ आणि −१ ह्यांत पांच गणितप्रमाणें घाल.

येथें $अ = १$, $ल = -१$, आणि $\because$ ५ मध्यपदें आणि २ आद्यंतपदें आहेत, $\therefore न = ५ + २ = ७$.

$$ल = अ + (न-१)ड, \therefore ड = \frac{ल - अ}{न - १} = \frac{-१-१}{७-१} = -\frac{२}{६} = -\frac{१}{३},$$

$\therefore १ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३} =$ पहिलें मध्यप्रमाण.

$\frac{२}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१}{३} =$ दुसरें ....

$\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = ० =$ तिसरें .... } उत्तर.

$० - \frac{१}{३} = -\frac{१}{३} =$ चवथें ....

$-\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = -\frac{२}{३} =$ पांचवें ....

५. एका पोकळ समबाजू त्रिकोणाकृतीनें तीन तीन रांगा लावून कांहीं शिपाई उभे केले आहेत, आणि बाहेरील रांगेंत न शिपाई आहेत, तर एकंदर किती शिपाई आहेत?

प्रथमतः, तो त्रिकोण भरींव आहे असें समजून ती मनुष्यसंख्या काढावयाची

$$अ=१,\quad ल=न,\quad न=न,$$

$$स=(अ+ल)\frac{न}{२}=(१+न)\frac{न}{२}=\frac{न^{२}+न}{२}.$$

पुनः, पोकळ भागांत किती मनुष्यें उभीं राहतील तें काढावयाचें,

$$अ=१,\quad न_{१}=न-९=ल,$$

$$स_{१}=(अ+ल)\frac{न_{१}}{२}=(१+न-९)\frac{न-९}{२}=\frac{न^{२}-१७न+७२}{२}.$$

आतां, पहिली मनुष्यसंख्या − दुसरी संख्या = जी संख्या काढावयाची ती;

$$\therefore स-स_{१}=\frac{न^{२}+न}{२}-\frac{न^{२}-१७न+७२}{२}=\frac{१८न-७२}{२}=९न-३६.$$

जर र रांगी असल्या, तर नं $=न-३र$; आणि शिपायांची संख्या $=\frac{३र}{२}(२न+१-३र)$.

६. $१^{३}+२^{३}+३^{३}\cdots+न^{३}$, ह्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$१^{३}+२^{३}+३^{३}+४^{३}+\cdots\cdots+न^{३}=$$

$$१+(३+५)+(७+९+११)+(१३+१५+१७+१९)+\cdots\cdots+न^{३},$$

असल्या प्रकारच्या न रकमा आहेत आणि नव्या रकमेंत न पदें आहेत.

म्हणून पदांची एकंदर संख्या काढावयाची,

अ = १, उ = १, न = न,

$\therefore \left\{२+न-१\right\}\frac{न}{२} = \frac{न^{२}+न}{२}$ = एकंदर सगळीं पदें.

आतां, सर्व श्रेढीचें सर्व धन काढावयाचें,

अ = १, उ = २, $न_{१} = \frac{न^{२}+न}{२}$,

$$\therefore स = \left\{२+\left(\frac{न^{२}+न}{२}-१\right)\cdot२\right\}\frac{न^{२}+न}{४} = \left(\frac{न^{२}+न}{२}\right)^{२}.$$

परंतु $\frac{न^{२}+न}{२} = १+२+३\cdots\cdots+न$,

$$\therefore १^{३}+२^{३}+३^{३}\cdots\cdots+न^{३} = (१+२+३\cdots\cdots+न)^{२}.$$

७. प गणितश्रेढीचीं सर्वधनें $स_{१}$, $स_{२}$, $स_{३}$, इ० $स_{प}$ आहेत; प्रत्येक श्रेढी न पदांपर्यंत वाढविली आहे; प्रत्येक श्रेढीचीं पहिलीं पदें १, २, ३, ४, इ० आणि उत्तरें १, ३, ५, ७, इ० आहेत; तर असें सिद्ध करकीं

$$स_{१}+स_{२}+स_{३}+इ०+स_{प} = \frac{१}{२}\times नप\,(नप+१)$$

$$\left.\begin{array}{l} स_{१} = १, २, ३, \\ स_{२} = २, ५, ८, \\ स_{३} = ३, ८, १३, \end{array}\right\} \text{इ० नपदांपर्यंत}, \therefore \left\{\begin{array}{l} १लें\ उत्तर\ १ = २\times१-१, \\ २रें \cdots\ ३ = २\times२-१, \\ ३रें \cdots\ ५ = २\times३-१, \\ \therefore पवें \cdots = २प-१, \end{array}\right.$$

$\therefore$ स$_प$=प, ३प−१, ५प−२, इ० न पदांपर्यंत=पवी श्रेणी.

आतां, $स_१ = नअ + \frac{न(न-१)ड}{२} = न + \frac{न(न-१)}{२} = \frac{न^२+न}{२}$,

$स_२ = \cdots\cdots\cdots\cdots = २न + \frac{न(न-१)}{२}.३ = \frac{३न^२+न}{२}$,

$स_३ = \cdots\cdots\cdots\cdots = ३न + \frac{न(न-१)}{२}.५ = \frac{५न^२+न}{२}$,

$स_प = \cdots\cdots\cdots = पन + \frac{न(न-१)}{२}.(२प-१) = \frac{(२प-१)न^२+न}{२}$,

ह्या पदांचें उत्तर $न^२$ आहे, $\therefore$ हीं गणितप्रमाणांत आहेत; आतां ह्यांचें सर्वधन काढावयाचें,

$अ = \frac{न^२+न}{२}$, $ल = \frac{(२प-१)न^२+न}{२}$, $न = प$,

$\therefore स = (अ+ल)\frac{न}{२}, = \left\{\frac{न^२+न}{२} + \frac{(२प-१)न^२+न}{२}\right\}\frac{प}{२}$

$= \frac{१}{२}नप(नप+१)$.

८. पायदळाच्या एका तुकडीनें सकाळीं साहा वाजतां कूच केलें, आणि ती दर तासास $३\frac{१}{२}$ मैल चालली; तिचे पाठीमागून तीन तासांनीं त्याच स्थलाहून घोडेस्वार पाठविले, आणि ते पहिल्या तासास $३\frac{१}{२}$ मैल, दुसऱ्या

तासांत ४ मैल, तिसऱ्या तासांत ४½ मैल, ह्याप्रमाणें चालले, तर त्या स्वारांनीं किती वेळांत पायदळास गांठलें?

पायदळास गांठावयास घोडेस्वारांस जितके तास लागले ते दाखवायास क्ष घे,

तर क्ष तासांत घोडस्वार किती मैल चालले तें काढ,

$$अ = \frac{७}{२}, \quad ड = \frac{१}{२}, \quad न = क्ष,$$

$$\therefore स = \frac{न}{२}\{२अ + (न-१)ड\} = \frac{क्ष}{२}\{७ + (क्ष-१)\frac{१}{२}\}$$

$$= \frac{क्ष}{२}\left(\frac{१३}{२} + \frac{क्ष}{२}\right) = \frac{१३क्ष + क्ष^२}{४} = \text{जितके}$$

मैल घोडेस्वार क्ष तासांत गेले ते.

पुनः, $क्ष + ३$ = पायदळ जितके तास चाललें ते,

$\therefore \frac{७}{२}(क्ष+३)$ = जितके मैल तें चाललें ते,

$$\therefore \frac{७}{२}(क्ष+३) = \frac{१३क्ष + क्ष^२}{४}, \quad १३क्ष + क्ष^२ = १४क्ष + ४२,$$

$$क्ष^२ - क्ष = ४२, \quad \therefore क्ष = ७ \text{ तास. उत्तर.}$$

९. असें सिद्ध कर कीं एका गणितश्रेणींतील २न पदांचें उत्तरार्ध त्याच श्रेणींतील ३न पदांच्या सर्वधनाच्या $\frac{१}{३}$ ह्या बरोबर आहे.

अ, अ+ड, अ+२ड, अ+३ड, अशी श्रेणी घे.

तर, २न पदांच्या उत्तरार्धाचें सर्वधन काढावयाचें,

$अ = अ$, $ड = ड$, $न = न$, $\therefore ल = अ + (न - १) ड =$ नवें अथवा पूर्वार्धाचें शेवटील पद.

$\therefore अ + (न - १) ड + ड$, म्हणजे $अ + नड =$ उत्तरार्धाचें पहिलें पद, आणि

$\therefore अ_१ = अ + नड$, $ड = ड$, $न = न$,

$$\therefore स = \frac{न}{२}(२अ_१ + (न - १) ड) = \frac{न}{२}\{२(अ + नड) + (न - १) ड\}$$

$$= \frac{न}{२}(२अ + २नड + नड - ड) = \frac{न}{२}(२अ + ३नड - ड)$$

$= २$न पदांचे उत्तरार्धाचें सर्वधन.

आतां ३न पदांचें सर्वधन काढावयाचें,

$अ = अ$, $ड = ड$, $न_१ = ३न$,

$$\therefore स_१ = \frac{न_१}{२}\{२अ + (न_१ - १) ड\} = \frac{३न}{२}\{२अ + (३न - १) ड\},$$

$$= \frac{३न}{२}(२अ + ३नड - ड),$$

$\therefore \frac{न}{२}(२अ + ३नड - ड) = ३$न पदांच्या सर्वधनाचा $\frac{१}{३}$.

$\therefore २$न पदांचें उत्तरार्ध $= ३$न पदांच्या सर्वधनाचा $\frac{१}{३}$.

१०. जर, $क्ष^३ + (क्ष + १)^३ + (क्ष + २)^३ + \cdots$ ९ पदांपर्यंत $= ५०१$, तर क्षची किंमत काढ.

$क्ष = ज्ञ - ४$ धर, तर ती श्रेणी अशी होते

$(\text{ज्ञ}-४)^२+(\text{ज्ञ}-३)^२+(\text{ज्ञ}-२)^२+(\text{ज्ञ}-१)^२+\text{ज्ञ}^२$
$+(\text{ज्ञ}+१)^२+(\text{ज्ञ}+२)^२+(\text{ज्ञ}+३)^२+(\text{ज्ञ}+४)^२=५०१,$

$२\text{ज्ञ}^२+३२+२\text{ज्ञ}^२+१८+२\text{ज्ञ}^२+८+२\text{ज्ञ}^२+२+\text{ज्ञ}^२=५०१,$

$\therefore ९\text{ज्ञ}^२+६०=५०१,\quad ९\text{ज्ञ}^२=४४१,\quad ३\text{ज्ञ}=२१,$

$\therefore \text{ज्ञ}=७,\quad \therefore \text{क्ष}=\text{ज्ञ}-४=३.$

११. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ३० येईल, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ३०८ येईल.

क्ष-य, क्ष, क्ष+य, हीं पदें त्या तीन संख्या दाखविण्यास घे, तर क्ष-य+क्ष+क्ष+य=३०, म्हणजे ३क्ष=३०, ∴ क्ष=१०,

$\text{क्ष}^२-२\text{क्षय}+\text{य}^२+\text{क्ष}^२+\text{क्ष}^२+२\text{क्षय}+\text{य}^२=३०८,$

$३\text{क्ष}^२+२\text{य}^२=३०८,\quad २\text{य}^२=३०८-३\text{क्ष}^२=३०८-३००=८,$

$\therefore \text{य}^२=४,\quad \text{य}=२=$ उत्तर,

म्हणून क्ष-य = १०-२ = ८.
क्ष = १० = १०.
क्ष+य = १०+२ = १२.
} उत्तर.

१२. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ कीं ज्यांची बेरीज २४, आणि गुणाकार ९४५ होईल.

क्ष-३य, क्ष-य, क्ष+य, क्ष+३य, ह्या त्या

चार संख्या घे,

तर त्यांची बेरीज ४क्ष=२४, ∴ क्ष=६,

त्यांचा गुणाकार (क्ष−३य)(क्ष+३य)(क्ष−य)(क्ष+य)=९४५.

∴ (क्ष^२−९य^२)(क्ष^२−य^२)=९४५,

∴ क्ष^४−१० क्ष^{२}य^२+९य^४=९४५; ह्यांत क्षची किंमत घातल्यानें,

१२९६−३६० य^२+९य^४=९४५,

९य^४−३६० य^२=−३५१, ∴ य=१.

म्हणून क्ष−३य = ६−३ = ३.
क्ष−य = ६−१ = ५.
क्ष+य = ६+१ = ७.
क्ष+३य = ६+३ = ९.
} उत्तर

उदाहरणें.

१. १+२+३+४+इ० न पर्यंत पदांचें श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. $\frac{१}{२}$न(न+१).

२. ९+१५+२१+इ०, १० पदांपर्यंत पदांची बेरीज काढ. उत्तर. ३६०.

३. $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{६}$+इ०, २० पदांच्या श्रेढीचें सर्व-

धन, आणि २०वें पद काढ.

उत्तर.-२१$\frac{२}{३}$, आणि-२$\frac{१}{३}$.

४. १+८+१५+इ०, १०० पदांची बेरीज=३४७५०.

५. $\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{६}$+इ०, १२ पदांची बेरीज=-१$\frac{१}{२}$.

६. ७, ५$\frac{१}{२}$, ४, इ०, पदांचे श्रेढीचें ९वें पद=-५.

७. $\frac{७}{१२}+\frac{२}{३}+\frac{३}{४}$+इ०, २४ पदांच्या श्रेढीचें सर्व-धन, आणि २४ वें पद काढ.

उत्तर. ३७, आणि २$\frac{१}{२}$.

८. जींत अ=३, ल=१७, न=२९, ती श्रेढी काढ.

उत्तर. ३, ३$\frac{१}{२}$, ४, ४$\frac{१}{२}$, इ०.

९. १, ९, १७, २५, इ०, पदांचे श्रेढीचें १००वें पद=७९३.

१०. $\frac{१}{२}+\frac{३}{४}$+१+इ०, १० पदांची बेरीज=१६$\frac{३}{४}$.

११. १९८, १९३, १८८, इ०, ४० पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. ४०२०.

१२. $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{६}$, $-\frac{१}{६}$. इ० पदांचें श्रेढीचें २०वें पद=-५$\frac{५}{६}$.

१३. $\frac{१}{२}-\frac{२}{३}-\frac{११}{६}$-इ०, १३ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

उत्तर.-८४$\frac{१}{२}$.

१४. $\frac{५}{७}+१\frac{२}{७}+$ इ०, न पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. $\frac{न}{७}$(२न+३).

१५. १९ आणि ३५ ह्यांच्या मध्यें तीन गणित प्रमाणें, आणि २$\frac{३}{३}$ आणि $\frac{३}{३}$ ह्यांच्या मध्यें पांच गणित प्रमाणें काढ.

उत्तर. २३, २७, ३१; आणि २$\frac{१}{३}$, २, १$\frac{२}{३}$, १$\frac{१}{३}$, १.

१६. जर स=४०, अ=७, ड=२, तर न काय?

उत्तर. न=४, किंवा −१०.

१७. एका गणितश्रेढींतील पहिल्या पदापासून पंधरा पदांची बेरीज ६००, आणि उत्तर. ५ आहे; तर तींतील पहिलें पद काढ. उत्तर. ५.

१८. एका गणितश्रेढींतील पहिलें पद ३ आहे, आणि पहिल्यापासून दाहा पदांची बेरीज १६५ आहे; तर ती श्रेढी कोणती आहे?

उत्तर. ३, ६, ९, इ०

१९. २$\frac{१}{२}$ आणि ६$\frac{१}{४}$ ह्यांच्या मध्यें चार गणित प्रमाणें घाल. उत्तर. ३$\frac{१}{४}$, ४, ४$\frac{३}{४}$, ५$\frac{१}{२}$.

२०. एका श्रेढींतील पहिल्यापासून ९ पदांची बेरीज ० आहे, आणि शेवटील पद −$\frac{१}{३}$ आहे; तर

ती श्रेढी कोणती आहे? उत्तर. $\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{६}+$ इत्यादि.

२१. −१ आणि १५ ह्यांच्यामध्यें तीन गणितप्रमाणें घाल. उत्तर. ३, ७, आणि ११.

२२. एका गणितश्रेढीचें सर्वधन ६ $\frac{७}{८}$, पहिलें पद १ $\frac{१}{४}$. आणि उत्तर −$\frac{१}{८}$ आहे; तर त्या श्रेढीचा गच्छ काय आहे? उत्तर. १०.

२३. एका गणितश्रेढींतील तिसरें पद ७ आहे, आणि साहावें पद १६ आहे. तर ती श्रेढी कोणती आहे?

उत्तर. १, ४, ७, १०, इ०.

२४. १ आणि ३१ ह्यांच्यामध्यें क्ष गणितप्रमाणें आहेत, आणि (क्ष−१) ह्या मध्यप्रमाणाच्या $\frac{५}{९}$ बरोबर ७वें पद आहे; तर तीं मध्यप्रमाणें किती आहेत?

उत्तर. १४.

२५. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ कीं ज्यांची बेरीज १० आहे, आणि दुसऱ्या संख्येचा आणि तिसऱ्या संख्येचा गुणाकार ३३ $\frac{१}{३}$ आहे.

उत्तर. −३ $\frac{१}{३}$, ३ $\frac{१}{३}$, १०

२६. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज १५ आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ८३

आहे. उत्तर. २, ५, ८

२७. $\frac{क्ष^२-१}{क्ष}+क्ष+\frac{क्ष^२+१}{क्ष}+$ इ० न पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन आणि नवें पद काढ.

उत्तर. $नक्ष+\frac{१}{२}न(न-३)\frac{१}{क्ष}$, आणि $क्ष+(न-२)\cdot\frac{१}{क्ष}$

२८. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज २४ आहे, आणि गुणाकार ४८० आहे.

उत्तर. ६, ८, १०.

२९. ज्या श्रेढीचें पहिलें पद $न^२-न+१$ आहे, आणि उत्तर २ आहे, त्या श्रेढीच्या न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर. $न^३$.

३०. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ, कीं ज्यांतील आद्यंतपदांचा गुणाकार २७ होईल, आणि मध्यपदांचा गुणाकार ३५ होईल.

उत्तर. ३, ५, ७, ९.

३१. ज्या गणितश्रेढीचें नवें पद आणि मवें पद अनुक्रमें म आणि न आहेत, तर तिच्या ज्या पदांची बेरीज $\frac{१}{२}(म+न)\cdot(म+न-१)$ आहे, त्या पदांची संख्या आणि तिचें शेवटील पद काढ.

उत्तर. म+न, किंवा म+न−१; आणि ०, किंवा १.

३२. कोणी एका गृहस्थाच्या दृष्टीस असें पडलें, कीं एक आगबोट पहिल्या सेकंदांत ४ फूट जाते आणि ६०व्या सेकंदांत ८८ फूट जाते; तर दरएक सेकंदांत तिची गति एकसारखीच वाढत आहे असें मानल्यास ती पहिल्या मिनिटांत किती फूट लांब जाईल?

उत्तर. २७६० फूट

३३. पाठीमागलेंच उदाहरण घेऊन, त्या आगबोटीची गति कोणत्या संख्येनें एकसारखी वाढत होती, आणि तिला पहिला मैल जावयास किती वेळ लागला तो काढ.

उत्तर. $१\frac{२५}{५९}$ फूट; आणि क्रमानें, $८३\frac{२१}{२५}$ सेकंद.

३४. एका गणितश्रेढीचा गच्छ उत्तराच्या अर्धा बरोबर आहे, शेवटचें पद पहिल्या पदाच्या चौपट आहे, आणि सर्वधन पहिल्या पदाच्या वर्गाच्या $\frac{३}{४}$ ह्यां बरोबर आहे; तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. २०, ३२, ४४, ५६, ६८, ८०.

३५. कोणी एका गांवाहून अ दुसरे गांवीं जावयास निघाला, आणि तो पहिल्या दिवशीं ६ मैल

दुसरे दिवशीं २६ मैल, तिसरे दिवशीं ३४ मैल, ह्याप्रमाणें चालत गेला; ४ दिवसांनीं त्याच गांवाहून त्यास गांठावयास व निघाला, तो दररोज ९४ मैल चालला; तर त्यास अला गांठावयास किती दिवस लागले?   उत्तर. ४ दिवस.

३६. कांहीं मनुष्यांनीं मिळून ३४५ पौंडांस एक शेत खरेदी केलें, त्यांत जो मनुष्य वयानें लहान होता त्यानें जितका पैसा दिला त्याहून ५ पौंड अधिक इतका त्यापेक्षां जो वडील होता त्यानें दिला, आणि ह्याच प्रमाणें बाकीचे मनुष्य गणित प्रमाणानें पैसा देत गेले. नंतर कनिष्ठमंडळीनें (म्हणजे सर्वांहून जो वयानें लहान त्यापासून सर्व मनुष्यसंख्येचें अर्ध इतक्या मनुष्यांनीं) आपल्या पैक्याचे किमतीचें शेत तोडून घेतलें, आणि आपआपली वर्गणी सारखी करून आपापणात तें शेत सारखें वांटून घ्यावें असा त्यांनीं ठराव केला, तेव्हां एकेकावर २२ पौंड वर्गणी आली; तर शेत खरेदी केलें तेव्हां एकंदर मनुष्यें किती होतीं?

उत्तर १० मनुष्यें.

३७. एका गणितश्रेढींतील न+१ पदांची बेरीज (१+न)·(१$\frac{१}{३}$+न) आहे, तर तींतील नवें पद काढ.

उत्तर. २(न−$\frac{१}{३}$).

३८. एका गणितश्रेढींतील न पदांची बेरीज पन+क्षन^{२} आहे, तर तींतील मवें पद काढ.

उत्तर. प+(२म−१)क्ष.

३९. एका गणितश्रेढींतील न पदांची बेरीज $\frac{न}{७}$(न+४) आहे, तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. $\frac{५}{७}$, १, १$\frac{२}{७}$, १$\frac{४}{७}$, इ०.

४०. एका गणितश्रेढींतील पवें पद अ, क्षवें पद ब, आणि रवें पद क आहे; तर अ, ब, आणि क ह्यांचे मध्यें परस्पर काय संबंध आहे?

उत्तर. (क्ष−र)अ+(र−प)ब+(प−क्ष)क=०.

भूमितिश्रेढी.

(२३). ज्या श्रेढींतील पदें एकाच गुणोत्तरानें चढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेणीस भूमितिश्रेढी म्हणतात. जसें १, ३, ९, २७, ८१ ही भूमितिश्रेढी आहे, हींतील गुणोत्तर ३ आहे; आणि

$\frac{१}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{१}{२४}$, $\frac{१}{४८}$, हीही भूमितिश्रेढी आहे, हींतील गुणोत्तर $\frac{१}{२}$ आहे. श्रेढींतील कोणत्या एका पदास त्याच्याच मागल्या पदानें भागिलें असतां गुणोत्तर निघतें.

सिद्धांत. भूमितिश्रेढीचें नवें पद आणि सर्वधन काढायाचें.

पहिलें पद दाखवायास अ, नवें पद दाखवायास ल, गुणोत्तर दाखवायास र, आणि सर्वधन दाखवायास स घे, तर ती भूमितिश्रेढी अशी होईल

$$अ, अर, अर^{२}, अर^{३}, \ldots अर^{न-२}, अर^{न-१},$$

आणि ह्यावरून हें उघड आहे कीं नवें पद $ल=अर^{न-१}$,

$$आतां,\ स=अ+अर+अर^{२} \ldots +अर^{न-२}+अर^{न-१},$$

$$\therefore\ सर= \quad अर+अर^{२} \ldots +अर^{न-२}+अर^{न-१}+अर^{न},$$

$$\therefore\ वजाबाकी\ केल्यानें,\ सर-स=अर^{न}-अ,$$

$$म्हणजे,\ स(र-१)=अ(र^{न}-१),$$

$$\therefore\ स=अ\frac{(र^{न}-१)}{र-१}$$

कुर०१. ∵ $स = \frac{अर^{न} - अ}{र-१}$, आणि $रल = अर^{न}$, ∴ $स = \frac{रल - अ}{र-१}$.

कुर०२. ∵ $स = \frac{अर^{न}}{र-१} - \frac{अ}{र-१}$, आणि जर र समअपूर्णांक आहे, तर जसजसा न वाढत जाईल, तसतशी $र^{न}$ ची किंमत कमी होत जाईल, आणि जेव्हां न अतिशयितच वाढेल. तेव्हां $र^{न}$ कोणत्याही कमी किंमतीचे पदाहून कमी होईल. ∴ $\frac{अर^{न}}{र-१}$ हें पद न घेतलें तरी चालेल, आणि मग $-\frac{अ}{र-१}$ किंवा $\frac{अ}{१-र}$ हें पद श्रेढीची मर्यादा दाखवील.

म्हणून, जेव्हां र समअपूर्णांक आहे आणि श्रेढी अतिशयच वाढविली आहे, तेव्हां $स = \frac{अ}{१-र}$.

दोन पदांचे भूमितिमध्यप्रमाण = त्यांच्या गुणाकाराचें वर्गमूळ म्हणजे, जर अ, म, ब, हीं पदें भूमितिप्रमाणात आंहेत, तर $\frac{म}{अ} = \frac{ब}{म}$, ∴ $म^{२} = अब$, ∴ $म = \sqrt{अब}$.

उदाहरणें.

१. १, २, ४, ८ इ०, १२ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

येथें अ = १, र = २, न = १२,

∴ $स = अ\frac{र^{न}-१}{र-१} = १\cdot\frac{२^{१२}-१}{२-१} = ४०९६ - १ = ४०९५$.

२. ६५६१, २१८७, ७२९, इ०, ६ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

येथें $अ = ६५६१,\ र = \frac{१}{३},\ न = ६,$

$$\therefore स = अ\cdot\frac{र^{न}-१}{र-१} = अ\frac{\left(\frac{१}{३}\right)^{६}-१}{\frac{१}{३}-१} = अ\frac{\frac{१}{७२९}-१}{\frac{१}{३}-१},$$

$$= अ\cdot\frac{१-७२९}{२४३-७२९} = अ\frac{-७२८}{-४८६} = ६५६१\times\frac{३६४}{२४३},$$

$$= २७\times ३६४ = ९८२८.$$

३. $\frac{२}{३}-\frac{१}{३}+\frac{१}{६}-$ इ०, अनंत पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

येथें $अ = \frac{२}{३},\ र = -\frac{१}{२},$

$$\therefore स = \frac{अ}{१-र} = \frac{\frac{२}{३}}{१+\frac{१}{२}} = \frac{४}{६+३} = \frac{४}{९}.$$

४. $\frac{१}{३}$ आणि ८१ ह्यांच्या मध्यें चार भूमितिप्रमाणें घाल.

येथें २ आद्यंत पदें आणि ४ मध्यपदें मिळून एकंदर ६ पदें आहेत;

$$अ = \frac{१}{३},\ ल = ८१,\ न = ६,$$

आतां $\text{ल}=\text{अ}\text{र}^{\text{न}-१}$, $\therefore ८१=\frac{१}{३}\text{र}^{५}$, $\text{र}^{५}=२४३=३^{५}$, $\therefore \text{र}=३$;

$\therefore \frac{१}{३}\times ३=१$, $१\times ३=३$, $३\times ३=९$, $९\times ३=२७$,

आणि ∴ १, ३, ९, २७ हीं मध्यप्रमाणें आहेत.

५. अ आणि ब ह्या दोन पदांचें गणितमध्यप्रमाण जर त्यांचे भूमिति मध्यप्रमाणाचे दुप्पट आहे, तर असें सिद्ध कर कीं $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{२+\sqrt{३}}{२-\sqrt{३}}$.

$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२}$ = गणितमध्यप्रमाण, $\sqrt{\text{अब}}$ = भूमितिमध्यप्रमाण;

आतां $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२}=२\sqrt{\text{अब}}$, $\therefore \text{अ}+\text{ब}=४\sqrt{\text{अ}}\sqrt{\text{ब}}$,

$$\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}+\frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=४, \therefore \frac{\text{अ}}{\text{ब}}+२+\frac{\text{ब}}{\text{अ}}=१६, \frac{\text{अ}}{\text{ब}}-२+\frac{\text{ब}}{\text{अ}}=१२,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}-\frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=२\sqrt{३},\\ \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}+\frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=४,\end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l}२\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}=४+२\sqrt{३}\\ २\frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=४-२\sqrt{३},\end{array}$$

$$\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}=२+\sqrt{३}, \frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=२-\sqrt{३},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}\div\frac{\sqrt{\text{ब}}}{\sqrt{\text{अ}}}=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{२+\sqrt{३}}{२-\sqrt{३}}.$$

६. एका अनंत पदांचे श्रेढीचें सर्वधन २ आहे, आणि त्याच श्रेढीच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज $\frac{४}{३}$ आहे; तर अ आणि र काढ.

$$अ+अर+अर^{२}+अर^{३}+इ० = \frac{अ}{१-र} = २ \cdots\cdots (१)$$

$$अ^{२}+अ^{२}र^{२}+अ^{२}र^{४}+अ^{२}र^{६}+इ० = \frac{अ^{२}}{१-र^{२}} = \frac{४}{३} \cdots\cdots (२)$$

(२) ह्यास (१) ह्यानें भागल्यानें, $\frac{अ}{१+र} = \frac{२}{३}$, $\therefore अ = \frac{२}{३}(१+र)$

(१) $अ = २(१-र)$; आणि ह्या अच्या किंमतींचें समीकरण केल्यानें,

$$\frac{२}{३}(१+र) = २(१-र),\quad १+र = ३-३र,$$

$४र = २$, $\therefore र = \frac{१}{२}$, आणि $अ = २-२र = २-१ = १$.

७. जर $१+र+र^{२}+र^{३}+इ०$ अनंत $=स$, आणि $१+न+न^{२}+न^{३}+इ० \cdots\cdots = स_{१}$, तर असें सिद्ध कर कीं,

$$१+रन+र^{२}न^{२}+र^{३}न^{३}+इ० \cdots = \frac{सस_{१}}{स+स_{१}-१}$$

आतां, $१+रन+र^{२}न^{२}+इ० = \frac{१}{१-रन}$,

$स = \frac{१}{१-र}$, आणि $स_{१} = \frac{१}{१-न}$, $\therefore स-सर = १$, $स_{१}-स_{१}न = १$,

$\text{सर}=\text{स}-१,\ \text{स}_१\text{न}=\text{स}_१-१,\ \therefore \text{र}=१-\frac{१}{\text{स}},\ \text{न}=१-\frac{१}{\text{स}_१},$

$\therefore \text{रन}=१-\frac{१}{\text{स}}-\frac{१}{\text{स}_१}+\frac{१}{\text{सस}_१},\ \therefore १-\text{रन}=\frac{१}{\text{स}}+\frac{१}{\text{स}_१}-\frac{१}{\text{सस}_१},$

म्हणून $१+\text{रन}+\text{र}^२\text{न}^२+\text{इ०}=\dfrac{१}{\frac{१}{\text{स}}+\frac{१}{\text{स}_१}-\frac{१}{\text{सस}_१}}=\dfrac{\text{सस}_१}{\text{स}_१+\text{स}-१}.$

८. असें सिद्ध कर कीं $४\cdot५२१२१२१\ \text{इ०}=४\frac{८६}{१६५}.$

आतां, $४\cdot५२१२१२१\ \text{इ०}=४+\frac{५}{१०}+\frac{२१}{१०००}+\frac{२१}{१०००००}+\text{इ०},$

परंतु $\frac{२१}{१०००}+\frac{२१}{१०००००}+\frac{२१}{१००००००००}+\text{इत्यादि}=\dfrac{\frac{२१}{१०००}}{१-\frac{१}{१००}},$

$=\frac{२१}{१०००-१०}=\frac{२१}{९९०}=\frac{७}{३३०},$

$\therefore ४\cdot५२१२१२१\ \text{इ०}=\frac{४५}{१०}+\frac{७}{३३०}=\frac{१४९२}{३३०}=४\frac{८६}{१६५}.$

९. $\text{अ}-(\text{अ}+\text{ड})\text{क्ष}+(\text{अ}+२\text{ड})\text{क्ष}^२-(\text{अ}+३\text{ड})\text{क्ष}^३+\text{इत्या०},$ अनंत पदांचे श्रेढीचें सर्वधन काढ.

$\text{स}=\text{अ}-\text{अक्ष}-\text{डक्ष}+\text{अक्ष}^२+२\text{डक्ष}^२-\text{अक्ष}^३-३\text{डक्ष}^३+\text{इ०},$

$\text{सक्ष}=\text{अक्ष}-\text{अक्ष}^२-\text{डक्ष}^२+\text{अक्ष}^३+२\text{डक्ष}^३-\text{अक्ष}^४-३\text{डक्ष}^४+\text{इ०},$

$\therefore \text{स}+\text{सक्ष}=\text{अ}-\text{डक्ष}+\text{डक्ष}^२-\text{डक्ष}^३+\text{डक्ष}^४-\text{डक्ष}^५+\text{इत्या०},$

म्हणजे, $(१+\text{क्ष})\text{स}=\text{अ}-\text{ड}(\text{क्ष}-\text{क्ष}^२+\text{क्ष}^३-\text{इ०})=\text{अ}-\text{ड}\times\frac{\text{क्ष}}{१+\text{क्ष}},$

$$\therefore स = \frac{अ}{१+क्ष} - \frac{डक्ष}{(१+क्ष)^२} = \frac{अ+(अ-ड)क्ष}{(१+क्ष)^२}.$$

१०. जर एका भूमितिश्रेढींत न पदांचा गुणाकार प, बेरीज स, आणि व्युत्क्रमांची बेरीज $स_१$ आहे; तर असें सिद्ध कर कीं $प^२ = \left(\frac{स}{स_१}\right)^न$.

१ ली श्रेढी,

$$स = अ + अर + अर^२ + अर^३ + \cdots अर^{न-१} = अ\cdot\frac{र^न - १}{र-१},$$

२री श्रेढी.

$$स_१ = \frac{१}{अ} + \frac{१}{अर} + \frac{१}{अर^२} + \frac{१}{अर^३} + \cdots \frac{१}{अर^{न-१}} = \frac{१}{अ}\cdot\frac{\left(\frac{१}{र}\right)^न - १}{\frac{१}{र} - १}$$

$$= \frac{१}{अ}\cdot\frac{१-र^न}{र^{न-१} - र^न} = \frac{१}{अर^{न-१}}\cdot\frac{१-र^न}{१-र} = \frac{१}{अर^{न-१}}\cdot\frac{र^न - १}{र-१},$$

$$\therefore \frac{स}{स_१} = अ^२र^{न-१}, \quad \left(\frac{स}{स_१}\right)^न = अ^{२न}र^{न(न-१)};$$

$$आतां\ प = अ\cdot अर\cdot अर^२ \cdots अर^{न-१} = अ^न\cdot र^{१+२+३+\cdots(न-१)},$$

$१+२+३+\cdots(न-१)$ ह्या गणितश्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$स = \frac{न}{२}\{२अ+(न-१)ड\} = \frac{न-१}{२}\{२+(न-२)\} = \frac{न(न-१)}{२},$$

$$\therefore प = अ^न र^{\frac{न(न-१)}{२}}, \quad प^२ = अ^{२न} र^{न(न-१)}$$

$$\therefore प^{२} = \left(\frac{स}{स_{१}}\right)^{न}$$

११. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची वजाबाकी १२ होईल, आणि ज्यांचें गणितमध्यप्रमाण : भूमितिमध्य प्रमाणास : : ५ : ४.

मोठी संख्या = क्ष, धाकटी संख्या = य घे, तर क्ष − य = १२,

$\frac{क्ष+य}{२}$ = गणितमध्यप्रमाण, $\sqrt{क्षय}$ = भूमितिमध्यप्रमाण,

$\frac{क्ष+य}{२} : \sqrt{क्षय} : : ५ : ४$, $क्ष+य : २\sqrt{क्षय} : : ५ : ४$,

(कल०२०प्र०) $क्ष+२\sqrt{क्षय}+य : क्ष-२\sqrt{क्षय}+य : : ९ : १$,

$$\sqrt{क्ष}+\sqrt{य} : \sqrt{क्ष}-\sqrt{य} : : ३ : १,$$

$$२\sqrt{क्ष} : २\sqrt{य} : : ४ : २,$$

$$\sqrt{क्ष} : \sqrt{य} : : २ : १, \quad क्ष : य : : ४ : १,$$

$$\therefore क्ष = ४य, \quad ४य - य = १२, \quad ३य = १२,$$

$$\therefore य = ४, \quad क्ष = १६.$$

१२. जर $स = १ + \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} +$ इ०, अनंतपदांपर्यंत,

आणि $स_{१} = १ - \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} +$ इ०, ... ;

तर असें सिद्ध कर कीं $स : स_{१} : : ३७ : १$.

$$\left.\begin{aligned} स &= १ + \frac{३}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{८} + \frac{९}{१६} + इ० \\ \frac{स}{२} &= \quad\frac{१}{२} + \frac{३}{४} + \frac{५}{८} + \frac{७}{१६} + इ० \end{aligned}\right\} \text{वजाबाकी घे.}$$

$$\frac{स}{२} = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + इ० = २ + \frac{\frac{१}{२}}{१ - \frac{१}{२}} = २ + १ = ३,$$

$$\therefore स = ६;$$

$$\left.\begin{aligned} स_१ &= १ - \frac{३}{२} + \frac{५}{४} - \frac{७}{८} + \frac{९}{१६} - इ० \\ \frac{स_१}{२} &= \quad\frac{१}{२} - \frac{३}{४} + \frac{५}{८} - \frac{७}{१६} + इ० \end{aligned}\right\} \text{बेरीज घे.}$$

$$\therefore \frac{३स_१}{२} = १ - १ + \frac{१}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{८} - \frac{१}{१६} + इ० = \frac{\frac{१}{२}}{१-\left(-\frac{१}{२}\right)} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{३}{२}} = \frac{१}{३},$$

$$\therefore स_१ = \frac{२}{९};$$

$$\therefore स : स_१ :: ६ : \frac{२}{९}, :: ३ : \frac{१}{९}, :: २७ : १.$$

१३. एका भांड्यांत १० शेर दूध होतें, त्यांतून एक शेर दूध काढून त्यांत एक शेर पाणी ओतलें; पुनः त्या मिश्रणांतून एक शेर दूध काढून एक शेर पाणी ओतलें; आतां ह्याप्रमाणें दाहावेळां केलें; तर प्रत्येक वेळीं दूध आणि पाणी ह्यांचें चांगलें मिश्रण होतें असें

मानून, शेवटीं त्यांत वास्तविक दूध किती शेर राहिलें?

प्रथमतः १० शेर दूध होतें,

$\frac{१}{१०}$ शेर दूध काढलें,

मग ९ शेर दूध बाकी राहिलें,

आणि १ शेर पाणी त्यांत ओतलें;

$\frac{९}{१०}$ शेर दूध काढलें,

$९ - \frac{९}{१०} = \frac{८१}{१०}$ शेर दूध त्या भांड्यांत शिलक राहिलें,

आणि $\frac{१९}{१०}$ शेर पाणी त्यांत उरलें;

$\frac{८१}{१००}$ शेर दूध काढलें.

$\therefore १ + \frac{९}{१०} + \frac{८१}{१००} +$ इ० दाहा पदें = जितके शेर दूध काढलें ते,

येथें $अ = १$, $र = \frac{९}{१०}$, $न = १०$,

$$\therefore स = अ\frac{र^{न} - १}{र - १} = \frac{\left(\frac{९}{१०}\right)^{१०} - १}{\frac{९}{१०} - १} = \frac{.९^{१०} - १}{.९ - १} = \frac{१ - .३४८६७८४४०१}{१ - .९},$$

$$= \frac{.६५१३२१५५९९}{.१} = ६.५१३२१५५९९ = \text{काढलेलें दूध}.$$

$$\therefore १० - ६.५१३२१५५९९ = ३.४८६७८४४०१,$$

= शिल्लक राहिलेलें दूध.

१४. भूमितिप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं

ज्यांची बेरीज ७ आहे, आणि ज्यांच्या व्युत्क्रमांची बेरीज $\frac{७}{४}$ आहे.

पहिली संख्या $=\frac{क्ष}{य}$, आणि गुणोत्तर $=$ य घे,

तर $\frac{क्ष}{य}+क्ष+क्षय=७$, आणि $\frac{य}{क्ष}+\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{क्षय}=\frac{७}{४}$,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{१}{य}+१+य=\frac{७}{क्ष} \\ य+१+\frac{१}{य}=\frac{७}{४}क्ष \end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore \frac{७}{४}क्ष=\frac{७}{क्ष}, \\ क्ष^२=४, \ \therefore क्ष=२. \end{array}$$

$\therefore य+१+\frac{१}{य}=\frac{७}{२}$, $य-\frac{५}{२}=-\frac{१}{य}$,

$य^२-\frac{५}{२}य=-१$, $य^२-\frac{५}{२}य+\left(\frac{५}{४}\right)^२=-१+\frac{२५}{१६}=\frac{९}{१६}$,

$य-\frac{५}{४}=\pm\frac{३}{४}$ $\therefore य=\frac{५\pm३}{४}=२$;

$\therefore$ १, २, ४ ह्या त्या तीन संख्या.

१५. भूमितिप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ४० आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ८२० आहे.

त्या चार संख्या दाखवावयास क्ष, क्षय, $क्षय^२$, $क्षय^३$ घे,

तर $क्ष+क्षय+क्षय^२+क्षय^३=४०$, $\therefore क्ष(१+य+य^२+य^३)=४$

आणि $क्ष^२+क्ष^२य^२+क्ष^२य^४+क्ष^२य^६=८२०$, $\therefore क्ष^२(य^२+१+य^४+य^६)=८२$

$$\therefore \text{क्ष}\{१+\text{य}^२+\text{य}(१+\text{य}^२)\}=४०,\ \text{क्ष}(१+\text{य})(१+\text{य}^२)=४०,\ (१)$$

$$\text{क्ष}^२\{१+\text{य}^२+\text{य}^४(१+\text{य}^२)\}=८२०,\ \text{क्ष}^२(१+\text{य}^२)(१+\text{य}^४)=८२०,\ (२)$$

(१) ह्याचा वर्ग करून त्यास (२) ह्यानें भागल्यानें,

$$\frac{\text{क्ष}^२(१+\text{य})^२(१+\text{य}^२)^२}{\text{क्ष}^२(१+\text{य}^२)(१+\text{य}^४)}=\frac{१६००}{८२०},\quad \frac{(१+\text{य})^२(१+\text{य}^२)}{१+\text{य}^४}=\frac{८०}{४१},$$

ह्याचे छेद सोडवून गुणाकारादि केल्यानें,

$$\text{य}^२+\frac{१}{\text{य}^२}-\frac{८२}{३९}\left(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}\right)=\frac{८२}{३९},$$

म्हणून $\text{य}=३$, $\therefore \text{क्ष}=१$, $\therefore$ १, ३, ९, २७ ह्या त्या चार संख्या.

उदाहरणें.

१. ३+६+१२+इ०, ६ पदांची बेरीज = १८९.

२. ५+२०+८०+इ०, ५ पदांची बेरीज = १७०५.

३. $\frac{३}{२}+१+\frac{२}{३}+$इ०, ६ पदांची बेरीज = $४\frac{१७}{१६२}$.

४. ९, −६, ४, इ०, श्रेढीचें ८ वें पद = $-\frac{१२८}{२४३}$.

५. २, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{८}$, इ०, श्रेढीचें ६ वें पद = $\frac{१}{५१२}$.

६. $१-२+२^२-$इ०, १० पदांची बेरीज = −३४१.

७. $२१-३+\frac{३}{७}-$इ०, ५ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन

आणि शेवटील पद काढ. उत्त० $१८\frac{१२९}{३४३}$, आणि $\frac{३}{३४३}$.

८. $-\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, -\frac{२}{९}$, इ०, श्रेढीचें ५वें पद $= -\frac{८}{८१}$.

९. $\frac{४}{५}+२+५+$इ०, ह्या श्रेढींतील नवें पद, आणि न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर. $\frac{५^{न-२}}{२^{न-३}}$, आणि $\frac{१}{१५}\left(\frac{५^{न}-२^{न}}{२^{न-३}}\right)$.

१०. $\frac{३}{५}+\frac{१}{२}+\frac{५}{१२}+$इ०, ८ पदांची बेरीज $=\frac{१२८८९९१}{४६६५६०}$.

११. $\frac{१}{४}-\frac{१}{१६}+\frac{१}{६४}-$इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ० $\frac{१}{५}$.

१२. $१-\frac{१}{२}+\frac{१}{४}-$इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ० $\frac{२}{३}$.

१३. $२-१\frac{१}{३}+\frac{८}{९}-$इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ. उ० $१\frac{१}{५}$.

१४. $-३\frac{१}{५}+१\frac{३}{५}-\frac{४}{५}+$इ०, श्रेढीची मर्यादा काढ.

उत्तर. $-२\frac{२}{१५}$.

१५. $\frac{१}{२}$ आणि १२८ ह्यांचे मधील तीन भूमिति प्रमाणें काढ. उत्तर. ±२, ८, ±३२.

१६. ५ आणि १०८० ह्यांचे मधील दोन भूमिति मध्य-प्रमाणें, आणि ९ आणि $\frac{१}{९}$ ह्यांचे मधील तीन भूमिति-मध्यंप्रमाणें काढ. उत्तर. ३०, १८०; आणि ३, १, $\frac{१}{३}$.

१७. एका अनंतपद भूमितिश्रेढीचें सर्वधन २ आहे, आणि पहिल्या दोन पदांची बेरीज १$\frac{1}{2}$ आहे; तर ती श्रेढी काढ. उत्तर. १ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-$ इत्यादि.

१८. भूमितिप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांचा गुणाकार ६४ आहे, आणि ज्यांच्या घनांची बेरीज ५८४ आहे. उत्तर. २, ४, ८.

१९. जर एका अनंतपदभूमितिश्रेढीचें सर्वधन तिचे न पदांच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे, तर असें सिद्ध कर कीं तिचें गुणोत्तर $=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{न}}$.

२०. दोन संख्यांचें गणितमध्यप्रमाण आणि भूमितिमध्यप्रमाण ह्यांची बेरीज १३$\frac{1}{2}$ आहे, आणि भूमितिमध्यप्रमाण जर गणितमध्यप्रमाणांतून वजा केलें तर १$\frac{1}{2}$ बाकी राहते; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. ३ आणि १२.

२१. एका शिकारी कुत्र्यापासून एक ससा १०० यार्ड अंतरावर आहे, ते दोघे ही एकाच दिशेस पळतात, आणि कुत्रा सशापेक्षां १०० पट जलद चालतो; तर सशाला गांठावयास कुत्र्यास किती लांब गेलें पाहिजे?

उत्तर. १०१$\frac{1}{99}$ यार्ड.

२२. एका देशांतील लोक दरसाल भूमितिप्रमाणानें वाढतात, आणि चार वर्षांत त्यांतील लोक १०,००० पासून १४,६४१ झाले; तर दरसाल ते त्यांच्या कितव्या अंशानें वाढलें? उत्तर. $\frac{१}{१०}$.

२३. एका भूमितिश्रेढींत $(प+छ)$ वें पद $=म$, आणि $(प-छ)$ वें पद $=न$; तर असें सिद्ध कर कीं पवें पद $=\sqrt{मन}$, आणि छवें पद $=म\left(\frac{न}{म}\right)^{\frac{प}{२छ}}$. आणि जर पवें पद $=प_१$, आणि छवें पद $=छ_१$, तर असें सिद्ध कर कीं नवें पद $=\left(\frac{प_१^{न-छ}}{छ_१^{न-प}}\right)^{\frac{१}{प-छ}}$

२४. जर $\frac{मअ+नब}{म+न}$ हें म आणि न ह्यांचें गणित मध्यप्रमाण आहे, आणि अ आणि ब ह्यांचें भूमिति-मध्यप्रमाण आहे, तर म आणि न ह्यांच्या किंमती अ आणि ब ह्या पदांत आण.

२५. एका अनंतपद भूमितिश्रेढीचे पदांची बेरीज स आहे, आणि तिच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज $स_१$ आहे; तर असें सिद्ध कर, कीं तिचे न पदांची बेरीज

$$=स\left\{१-\left(\frac{स^२-स_१}{स^२+स_१}\right)^न\right\}$$

गायनश्रेढी.

(२४). ज्या श्रेढीचे पदांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत असतात, त्या श्रेढीस गायनश्रेढी म्हणतात. $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, इत्या॰ हीं पदें गायनश्रेढींत आहेत; कारण ह्यांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत आहेत. असेंच $\frac{३}{६}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{३}{८}$, इ॰, आणि $\frac{क}{अ}$, $\frac{क}{अ+ब}$, $\frac{क}{अ+२ब}$, इ॰, ह्या श्रेढी गायनश्रेढींत आहेत.

म्हणून जर एका गायनश्रेढींतील कांहीं पदें दिलीं असतां त्यांपासून ती श्रेढी चालविणें आहे, तर त्यांचे व्युत्क्रम घेऊन त्यांपासून गणितश्रेढी चालवावी आणि मग ह्या श्रेढींतील पदांचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायनश्रेढींतील पदें होतील; अथवा समच्छेदांच्या रीतीप्रमाणें पदांचे अंश सम करून छेद गणितप्रमाणानें वाढवावे म्हणजे झालें. उदाहरण, २, १$\frac{१}{५}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{२}{३}$, ह्यांपासून गायनश्रेढीचीं पुढील पदें आणणें झाल्यास $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{६}$, $\frac{३}{२}$, हीं पदें घेऊन गणितश्रेढीचीं पुढील पदें आणावीं; तीं $\frac{११}{६}$, $\frac{१३}{६}$, $\frac{५}{२}$, इत्यादि येतात, म्हणून $\frac{६}{११}$, $\frac{६}{१३}$, $\frac{२}{५}$, इ॰ हीं गायनश्रेढीचीं

पुढील पदें आहेत. अथवा दिलेल्या पदांस भागजाति अपूर्णांकाचें रूप देऊन नंतर त्यांस समांश करून व छेद गणितप्रमाणानें वाढवून आलेलीं पदें $\frac{६}{११}$, $\frac{६}{१३}$, $\frac{२}{५}$, इ० गायनश्रेढीचीं पुढील पदें आहेत.

सिद्धांत.

१. जर तीन पदें गायनप्रमाणांत आहेत, तर पहिल्यास जसें तिसरें तशी पहिलें आणि तिसरें ह्यांची वजाबाकी दुसरें आणि तिसरें ह्यांचे वजाबाकीस आहे*.

∵ जर अ, ब, क, हीं तीन पदें गायनप्रमाणांत आहेत, तर $\frac{१}{अ}$, $\frac{१}{ब}$, $\frac{१}{क}$, हीं पदें गणितप्रमाणांत आहेत.

∴ (२२ क० प्र०) $\frac{१}{अ}-\frac{१}{ब}=\frac{१}{ब}-\frac{१}{क}$, $\frac{ब-अ}{अब}=\frac{क-ब}{बक}$,

∴ $\frac{अ}{क}=\frac{अ-ब}{ब-क}$, ∴ अ : क : : अ-ब : ब-क.

कुर०. ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं जर कोणतींही तीन पदें वर सांगितलेल्या प्रमाणांत आहेत,

---

* कितीएक ग्रंथकार गायनप्रमाणाचें हें लक्षण सांगून, पदांची उलट गणितप्रमाणांत असते हें मागून सिद्ध करतात.

तर तीं गायनप्रमाणांत आहेत.

२. कोणत्याही दोन संख्यांचें गायनमध्यप्रमाण, त्या दोंहोंचे गुणाकाराचे दुपटीस त्यांचेच बेरजेनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबराबर असतें.

$\because$ (१सि०प्र०) $\frac{अ}{क} = \frac{अ-ब}{ब-क}$, अब-अक=अक-बक,

अब+बक=२अक, $\therefore$ ब(गायनमध्यप्रमाण) $= \frac{२अक}{अ+क}$.

३. जर तीन पदें गायनप्रमाणांत असतील तर तिसरें पद, पहिलें आणि दुसरें ह्यांचे गुणाकारास पहिल्याचे दुपटींतून दुसरें वजा करून जी बाकी राहील तिनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबराबर असतें.

$\because$ (१सि०प्र०) अब-अक=अक-बक, $\therefore$ क $= \frac{अब}{२अ-ब}$.

४. गायनश्रेढींत कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचा गुणाकार दुसऱ्या कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचे गुणाकारास आहे, तशी पहिल्या दोन पदांची वजाबाकी दुसऱ्या दोन पदांचे वजाबाकीस आहे.

$\because$ अ, ब, क, ···· ख, ह, ही एक गायनश्रेढी घे,

तर हींतील पदांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत आहेत.

$\therefore$ (२२ कल०प्र०) $\frac{१}{अ}-\frac{१}{ब}=\frac{१}{ख}-\frac{१}{ह}$, $\frac{ब-अ}{अब}=\frac{ह-ख}{खह}$,

$\frac{अब}{खह}=\frac{अ-ब}{ख-ह}$, $\therefore$ अब : खह : अ-ब : ख-ह.

५. गायनश्रेढींतील अ आणि ब हीं पहिलीं दोन पदें दिलीं असतां त्यांपासून नवें पद ज्ञ, खालचे सारणीनें काढतां येतें;

$$ज्ञ=\frac{अब}{(न-१)अ-(न-२)ब}.$$

$\because$ (२२ कल०प्र०) $\frac{१}{ब}-\frac{१}{अ}=\frac{अ-ब}{अब}=ड=$ उत्तर,

आणि (२२ क० सि०प्र०) $\frac{१}{ज्ञ}=\frac{१}{अ}+(न-१)\left\{ड=\frac{अ-ब}{अब}\right\}$

$$=\frac{(न-१)अ-(न-२)ब}{अब}=\text{अंत्यपद},$$

$$\therefore ज्ञ=\frac{अब}{(न-१)अ-(न-२)ब}.$$

६. अ आणि ब ह्यांच्या मध्यें न गायनमध्यप्रमाणें घालणें झाल्यास $\frac{१}{अ}$ आणि $\frac{१}{ब}$ ह्यांच्या मध्यें न गणितमध्यप्रमाणें घालून त्याचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायनमध्यप्रमाणें दाखवितील.

उदाहरणें.

१. २ आणि $\frac{\text{१}}{\text{५}}$ ह्यांच्या मध्यें दोन गायनमध्यप्रमाणें घाल.

$\frac{\text{२}}{\text{१}}$, $\frac{\text{१}}{\text{५}}$ हीं चार पदांच्या गायनश्रेढीचीं आद्यंत पदें आहेत,

∴ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$, ५ .... गणितश्रेढीचीं ....

(२२ कल० ४ उदा० प्र०) $\text{ड} = \frac{\text{ल} - \text{अ}}{\text{न} - \text{१}} = \frac{\text{५} - \frac{\text{१}}{\text{२}}}{\text{४} - \text{१}} = \frac{\text{४}\frac{\text{१}}{\text{२}}}{\text{३}} = \frac{\text{९}}{\text{६}} = \frac{\text{३}}{\text{२}}$,

$$\left.\begin{aligned} \therefore \frac{\text{१}}{\text{२}} + \frac{\text{३}}{\text{२}} &= \text{२} \\ \text{२} + \frac{\text{३}}{\text{२}} &= \frac{\text{७}}{\text{२}} \end{aligned}\right\} \text{ हीं गणितमध्यप्रमाणें आहेत.}$$

∴ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$, $\frac{\text{२}}{\text{७}}$ हीं गायनमध्यप्रमाणें आहेत.

२. एका गायनश्रेढीच्या तीन पदांची बेरीज $\text{१}\frac{\text{१}}{\text{१२}}$ आहे, आणि तींतील पहिलें पद $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ आहे; तर ती श्रेढी काढ, आणि ती दोन्ही बाजूंनीं वाढीव.

दुसरें पद = क्ष, आणि तिसरें पद = य घे,

तर $\frac{\text{१}}{\text{२}} + \text{क्ष} + \text{य} = \frac{\text{१३}}{\text{१२}}$, ∴ $\text{क्ष} + \text{य} = \frac{\text{१३}}{\text{१२}} - \frac{\text{६}}{\text{१२}} = \frac{\text{७}}{\text{१२}}$,

परंतु गायनप्रमाणाप्रमाणें, $\text{ब} = \frac{\text{२अक}}{\text{अ} + \text{क}}$,

∴ $\text{क्ष} = \frac{\text{२} \times \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{य}}{\frac{\text{१}}{\text{२}} + \text{य}} = \frac{\text{य}}{\text{य} + \frac{\text{१}}{\text{२}}} = \frac{\text{२य}}{\text{२य} + \text{१}}$, परंतु (१) $\text{क्ष} = \frac{\text{७}}{\text{१२}} - \text{य}$,

∴ $\frac{\text{७}}{\text{१२}} - \text{य} = \frac{\text{२य}}{\text{२य} + \text{१}}$, ∴ $\text{य} = \frac{\text{१}}{\text{४}}$, ∴ $\text{क्ष} = \frac{\text{१}}{\text{३}}$;

$\therefore \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$, इ० = गायनश्रेढी; $\therefore$ २, ३, ४, इ० = गणितश्रेढ

$\therefore$ −१, ०, १, २, ३, ४, इ० = दोन्हीकडून वाढविलेली गणितश्रेढ

$\therefore \frac{१}{-१}, \frac{१}{०}, \frac{१}{१}, \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$, इ० = दोन्हीकडून वाढविलेली गायनश्रेढी

$\therefore -१, \infty, १, \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$, इ० = उत्तर.

३. गायनप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ११ आहे, व ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ४९ आहे.

आद्यंत पदें दाखवायास क्ष आणि य घे,

तर $\frac{२\text{क्षय}}{\text{क्ष}+\text{य}}$ = मध्यप्रमाण.

$$\text{क्ष}+\text{य}+\frac{२\text{क्षय}}{\text{क्ष}+\text{य}} = ११, \cdots\cdots (१)$$

$$\text{क्ष}^{२}+\text{य}^{२}+\frac{४\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}}{(\text{क्ष}+\text{य})^{२}} = ४९, \cdots\cdots (२)$$

$$(१)\ \frac{२\text{क्षय}}{\text{क्ष}+\text{य}} = ११-(\text{क्ष}+\text{य}),$$

$$\therefore \frac{४\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}}{(\text{क्ष}+\text{य})^{२}} = १२१-२२(\text{क्ष}+\text{य})+\text{क्ष}^{२}+२\text{क्षय}+\text{य}^{२}$$

$$(२)\ \frac{४\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}}{(\text{क्ष}+\text{य})^{२}} = ४९ \quad -\text{क्ष}^{२} \quad -\text{य}^{२}$$

वजाबाकीनें

$$= ७२-२२(\text{क्ष}+\text{य})+२\text{क्ष}^{२}+२\text{क्षय}+२\text{य}^{२}$$

$\therefore$ क्ष^{२}+क्षय+य^{२}=११(क्ष+य)−३६ ⎫
(१) क्ष^{२}+४क्षय+य^{२}=११(क्ष+य) ⎭ वजाबाकी घे.

३क्षय = ३६, $\therefore$ क्षय=१२,

क्ष^{२}+क्षय+य^{२}−११(क्ष+य)=−३६ ⎫
क्षय =१२ ⎭ बेरीज घे.

क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}−११(क्ष+य)=−२४, $\therefore$ क्ष+य=८;

$\therefore$ क्ष=६, $\therefore$ य=२, $\therefore$ २, ३, ६. उत्तर.

४. जर $\frac{अ-ब}{ब-क}=\frac{अ}{अ}$, $\frac{अ}{ब}$, किंवा $\frac{अ}{क}$; तर असें सिद्ध कर कीं अ, ब, क, हीं पदें अनुक्रमें गणितप्रमाणांत, भूमितिप्रमाणांत, किंवा गायनप्रमाणांत आहेत.

$\because$ जर $\frac{अ-ब}{ब-क}=\frac{अ}{अ}=१$, तर अ−ब=ब−क,

$\therefore$ अ, ब, क, गणितप्रमाणांत आहेत.

आणिजर $\frac{अ-ब}{ब-क}=\frac{अ}{ब}$, तर अब−ब^{२}=अब−अक,

$\therefore$ ब^{२}=अक, $\therefore$ अ, ब, क, भूमितिप्रमाणांत आहेत.

...... $\frac{अ-ब}{ब-क}=\frac{अ}{क}$, तर अ:क::अ−ब:ब−क,

$\therefore$ अ, ब, क, गायनप्रमाणांत आहेत

५. अ आणि ब ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण, भूमितिमध्यप्रमाण, आणि गायनमध्यप्रमाण, हीं अनुक्रमें न, म, प, आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं म = न आणि प ह्यांचे भूमितिमध्यप्रमाण; आणि न > म > प.

$\because$ अ, ब, ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण $= \text{न} = \frac{\text{अ}+\text{ब}}{२}$,

.... भूमिति .... $= \text{म} = \sqrt{\text{अब}}$,

.... गायन .... $= \text{प} = \frac{२\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}}$,

$\therefore \text{नप} = \frac{\text{अ}+\text{ब}}{२} \times \frac{२\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}} = \text{अब} = \text{म}^२$,

$\therefore$ (२७ क॰ सि॰ २ कु॰ प्र॰) म = न आणि प ह्यांचें भूमितिमध्यप्र

पुनः, (१८ क॰ १ उदा॰ प्र॰) $\frac{\text{अ}}{२} + \frac{\text{ब}}{२} > २\cdot\sqrt{\frac{\text{अ}}{२}}\cdot\sqrt{\frac{\text{ब}}{२}}$,

म्हणजे $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२} > \sqrt{\text{अब}}$, $\quad \therefore \text{न} > \text{म}$;

असेंच, $\text{प} = \frac{२\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}} = \frac{\text{अब}}{\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२}} = \frac{\text{म}\cdot\text{म}}{\text{न}}$,

परंतु $\text{न} > \text{म}$, $\therefore \text{म} > \text{प}$, $\therefore \text{न} > \text{म} > \text{प}$.

उदाहरणें.

१. २ आणि ४ ह्यांचे मध्यें दोन गायनमध्यप्रमाणें घाल. उत्तर. $२\frac{२}{५}$, ३.

२. ४ आणि $१\frac{५}{७}$ ह्यांचे मध्यें तीन गायनमध्यप्रमाणे घाल. उत्तर. ३, $२\frac{२}{५}$, २.

३. $३\frac{३}{८}$ आणि $१\frac{१}{२}$ ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण, भूमितिमध्यप्रमाण आणि गायनमध्यप्रमाण काढ.

उत्तर. $२\frac{७}{१६}$, $२\frac{१}{४}$, $२\frac{१}{१३}$.

४. $\frac{२}{५}$ आणि $\frac{२}{११}$ ह्यांचेमध्यें दोन गायनमध्यप्रमाणें घाल. उत्तर. $\frac{२}{७}$, $\frac{२}{९}$.

५. $१\frac{१}{२}$, $२\frac{१}{७}$, $३\frac{३}{४}$ ही श्रेणी दोन्ही बाजूंनीं तीन तीन पदांपर्यंत वाढीव.

उत्तर. $\frac{१५}{१९}$, $\frac{१५}{१६}$, $१\frac{२}{१३}$, ... १५, $-७\frac{१}{२}$, −३.

६. अशा दोन संख्या काढ, कीं ज्यांची वजाबाकी ८ आहे, व ज्यांचें गायनमध्यप्रमाण $१\frac{४}{५}$ आहे.

उत्तर. ९ आंणि १, अथवा $\frac{४}{५}$ आणि $-७\frac{१}{५}$.

७. दोन संख्यांचें गायनमध्यप्रमाण २ आहे, आणि त्यांची बेरीज $४\frac{४}{३५}$ आहे, तर त्या दोन संख्या काढ. उत्तर. $२\frac{२}{५}$, $१\frac{५}{७}$.

८. दोन संख्यांचें गणितमध्यप्रमाणाची आणि गायनमध्यप्रमाणाची बेरीज $१२\frac{५}{७}$ आहे, आणि गायनमध्यप्रमाण गणितमध्यप्रमाणांत वजा केलें

असतां बाकी $\frac{१}{६}$ राहते; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. ४ आणि १०.

९. क्ष आणि य ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण: त्यांचें गायनमध्यप्रमाण : : म : न, तर असें सिद्ध कर कीं क्ष : य : : म + $\surd$(म² − न²) : म − $\surd$(म² − न²).

१०. १ + १ + २ + ३ + ५ + ८ + इत्यादि, ह्या श्रेढींत प्रत्येक पद त्याचे पाठीमागल्या दोन पदांच्या बेरजे बरोबर आहे; तर हींतील न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर. $\frac{१}{\surd५} \left\{ \left(\frac{१+\surd५}{२}\right)^{न+२} - \left(\frac{१-\surd५}{२}\right)^{न+२} \right\} - १.$

प्रकरण ९.

द्विपदकरणी.

सिद्धांत.

(२५). १. कोणत्याही पदाचें वर्गमूळ खंड पद आणि अखंड पद मिळून होणार नाहीं.

जर होत असेल, तर $\surd$क्ष = अ + $\surd$य घे,

तर क्ष = अ² + २अ$\surd$य + य, ∴ क्ष − य − अ² = २अ$\surd$य,

$\therefore \frac{क्ष-य-अ^{२}}{२अ} = \sqrt{य}$, म्हणजे अखंड पद = खंड पद,
हें होणें अशक्य आहे.

२. अ + $\sqrt{क्ष}$ = ब + $\sqrt{य}$ हें अखंड पद आणि खंड-पद, ह्यांचें एक समीकरण असेल, तर अ = ब, आणि $\sqrt{क्ष} = \sqrt{य}$.

कारण, $\sqrt{क्ष}$ = ब - अ + $\sqrt{य}$, आणि जर ब - अ = ० नसेल, तर $\sqrt{क्ष}$ अखंड पद व खंड पद मिळून होईल, परंतु हें होणें १ले सिद्धांतावरून अशक्य आहे, म्हणून ब - अ = ०, म्हणजे अ = ब, $\therefore \sqrt{क्ष} = \sqrt{य}$.

३. दोन भिन्न भिन्न करणींचा गुणाकार खंड आहे.
जर नसेल, तर $\sqrt{क्ष} \times \sqrt{य}$ = अक्ष घे, तर क्षय = अ^{२}क्ष^{२}, य = अ^{२}क्ष, $\therefore \sqrt{य}$ = अ$\sqrt{क्ष}$; म्हणजे $\sqrt{य}$ आणि $\sqrt{क्ष}$ ह्यांस एकच जातीचा करणीरूप गुणक आहे, परंतु हें आपले मूळ कल्पनेस अंगदीं विरुद्ध आहे.

४. ज्या द्विपदांत एक अखंड पद आणि एक खंड पद हीं आहेत त्याचें वर्गमूळ काढावयाचें.

अ + $\sqrt{ब}$ हें दिलेलें द्विपद आहे, असें मान.
$\sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$, असें घे; दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$अ+\sqrt{ब} = क्ष + २\sqrt{क्षय} + य,$$

$$\therefore (२ सि॰ प्र॰)\ क्ष+य = अ,\quad २\sqrt{क्षय} = \sqrt{ब},$$

$$क्ष^2 + २क्षय + य^2 = अ^2,\quad ४ क्षय = ब,$$

$$क्ष^2 - २क्षय + य^2 = अ^2 - ब, \therefore क्ष - य = \sqrt{अ^2 - ब},$$

$$क्ष + य = अ$$

$$२क्ष = अ + \sqrt{अ^2 - ब},$$

$$२य = अ - \sqrt{अ^2 - ब},$$

$$\therefore क्ष = \frac{अ+\sqrt{अ^2-ब}}{२},\quad य = \frac{अ-\sqrt{अ^2-ब}}{२},$$

$$\therefore \sqrt{अ+\sqrt{ब}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{अ+\sqrt{अ^2-ब}}{२}} \pm \sqrt{\frac{अ-\sqrt{अ^2-ब}}{२}}.$$

उदाहरणें.

१. $७ \pm ४\sqrt{३}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

$\sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} = \sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य}$ असें घे,

तर $७ \pm ४\sqrt{३} = क्ष \pm २\sqrt{क्षय} + य,$

$\therefore क्ष + य = ७, \pm २\sqrt{क्षय} = \pm ४\sqrt{३},$

$$क्ष^2 + २क्षय + य^2 = ४९,\ ४क्षय = ४८$$

$$\therefore क्ष^2 - २क्षय + य^2 = १,\ \therefore \left.\begin{matrix} क्ष - य = १ \\ क्ष + य = ७ \end{matrix}\right\} \therefore \begin{matrix} क्ष = ४, \\ य = ३, \end{matrix}$$

$$\therefore \sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} = \sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य} = २ \pm \sqrt{३}.$$

टीप. $\sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \pm\sqrt{\frac{अ + \sqrt{अ^2 - ब}}{२}} \pm \sqrt{\frac{अ - \sqrt{अ^2 - ब}}{२}}$,

ह्या सारणींत $अ = ७$ आणि $\sqrt{ब} = ४\sqrt{३} = \sqrt{४८}$ धरल्यानें हें उदाहरण सोडविनां येईल;

$$म्हणजे\ \sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{७ + \sqrt{४९ - ४८}}{२}} \pm \sqrt{\frac{७ - \sqrt{४९ - ४८}}{२}} = \pm २ \pm \sqrt{३}.$$

ह्या प्रमाणेंच पुढील सर्व उदाहरणें सोडविल्यां असतां लौकर होतील.

२. $४९ + २०\sqrt{६}$ ह्याचें चतुर्घातमूळ काढ.

$\sqrt{४९ + २०\sqrt{६}} = \sqrt{क्ष} + \sqrt{य}$, असें घे;

$$तर\ ४९ + २०\sqrt{६} = क्ष + य + २\sqrt{क्षय},$$

$$\therefore क्ष + य = ४९,\ २\sqrt{क्षय} = २०\sqrt{६},$$

$$\therefore क्ष^2 + २क्षय + य^2 = २४०१,\ ४क्षय = २४००,$$

$\therefore \text{क्ष}^२ - २\text{क्षय} + \text{य}^२ = १, \; \therefore \text{क्ष} - \text{य} = १, \; \text{क्ष} + \text{य} = ४० \; \Big\} \; \therefore \text{क्ष} = २५ = ५^२, \; \text{य} = २४ = ४ \times ६$

$\therefore \sqrt{४९ \pm २० \sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}} = ५ \pm २ \sqrt{६}$;

पुनः, $\sqrt{५ \pm २ \sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} \pm \sqrt{\text{य}}$ असें घे,

तर $५ \pm २\sqrt{६} = \text{क्ष} + \text{य} \pm २ \sqrt{\text{क्षय}}$,

$\therefore \text{क्ष} + \text{य} = ५, \; \pm २ \sqrt{\text{क्षय}} = \pm २ \sqrt{६}$,

$\text{क्ष}^२ + २\text{क्षय} + \text{य}^२ = २५, \; ४\text{क्षय} = २४$,

$\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ - २\text{क्षय} = १, \; \text{क्ष} - \text{य} = १, \; \text{क्ष} + \text{य} = ५ \; \Big\} \; \therefore \text{क्ष} = ३, \; \text{य} = २$,

$\therefore \sqrt[४]{४९ \pm २० \sqrt{६}} = \sqrt{५ \pm २ \sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} \pm \sqrt{\text{य}} = \sqrt{३} \pm \sqrt{२}$

३. -१ याचें अष्टघातमूळ काढ.

-१ याचें वर्गमूळ $= \sqrt{-१}$, किंवा $० + \sqrt{-१}$;

$\sqrt{० + \sqrt{-१}} = \sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}}$, असें घे;

तर $\text{क्ष} + \text{य} + २ \sqrt{\text{क्षय}} = ० + \sqrt{-१}$,

$\text{क्ष} + \text{य} = ०, \; २ \sqrt{\text{क्षय}} = \sqrt{-१}$,

$\text{क्ष}^२ + २\text{क्षय} + \text{य}^२ = ०$,

$४\text{क्षय} \quad = -१$

$\text{क्ष}^२ - २\text{क्षय} + \text{य}^२ = १$,

$\therefore \text{क्ष} - \text{य} \quad = १$

$$\text{क्ष}+\text{य} = \text{०}$$

$$\text{२क्ष} = \text{१},\ \therefore \text{क्ष} = \tfrac{\text{१}}{\text{२}},\ \sqrt{\text{क्ष}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\text{२य} = -\text{१},\ \therefore \text{य} = -\tfrac{\text{१}}{\text{२}},\ \sqrt{\text{य}} = \sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\therefore \sqrt{\text{क्ष}}+\sqrt{\text{य}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}+\sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\therefore \sqrt{\sqrt{-\text{१}}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}+\sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}};$$

$\sqrt{\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}+\sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}} = \sqrt{\text{क्ष}}+\sqrt{\text{य}}$ असें घे,

तर $\text{क्ष}+\text{य}+\text{२}\sqrt{\text{क्षय}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}+\sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$

$$\text{क्ष}+\text{य} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},\ \text{२}\sqrt{\text{क्षय}} = \sqrt{-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\text{क्ष}^{\text{२}}+\text{२क्षय}+\text{य}^{\text{२}} = \tfrac{\text{१}}{\text{२}},$$

$$\text{४क्षय} = -\tfrac{\text{१}}{\text{२}}$$

$$\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{२क्षय}+\text{य}^{\text{२}} = \text{१},$$

$$\text{क्ष}-\text{य} = \text{१}$$

$$\text{क्ष}+\text{य} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}$$

$$\text{२क्ष} = \text{१}+\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},\ \therefore \text{क्ष} = \tfrac{\text{१}}{\text{२}}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\text{२य} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}-\text{१},\ \therefore \text{य} = \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}},$$

$$\therefore \sqrt{\text{क्ष}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}},\ \sqrt{\text{य}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\therefore \sqrt{\text{क्ष}}+\sqrt{\text{य}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}}+\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}},$$

$$\therefore \sqrt[४]{-१} = \sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}}} + \sqrt{\frac{१}{२}\sqrt{\frac{१}{२}}-\frac{१}{२}},$$

$$= \text{क्रमारें}, \cdot ९२३९ + \cdot ३८२७\sqrt{-१}.$$

उदाहरणें.

१. $२+\sqrt{३}$, $८+२\sqrt{७}$, आणि $४-\sqrt{७}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर. $\sqrt{\frac{३}{२}}+\sqrt{\frac{१}{२}}$, $१+\sqrt{७}$, आणि $\sqrt{\frac{७}{२}}-\sqrt{\frac{१}{२}}$

२. $८-२\sqrt{१५}$, आणि $-१-४\sqrt{-३}$ ह्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर. $\sqrt{५}-\sqrt{३}$, $२-\sqrt{-३}$

३. $१+\sqrt{१-म^२}$, आणि $३\sqrt{३}+२\sqrt{६}$, ह्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर. $\sqrt{\frac{१+म}{२}}+\sqrt{\frac{१-म}{२}}$, $\sqrt[४]{३}(१+\sqrt{२})$.

४. $१४+८\sqrt{३}$, आणि $\frac{१७}{३}-४\sqrt{२}$ ह्यांचें चतुर्घातमूळ काढ. उत्तर. $\frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt[४]{२}}$, आणि $\sqrt[४]{\frac{१}{३}}\cdot(१-\sqrt{२})$



प्रकरण १०.

अनिश्चितवेळाप्रकाशक.

(२६). अ+बक्ष+कक्ष^{2}+... = ध+घक्ष+मक्ष^{2}+.....

हें समीकरण क्षच्या कोणती ही किंमत धरली असतां खरें आहे असें मानलें, तर क्षच्या सारख्या घातांचे वेळाप्रकाशक बरोबर होतील; म्हणजे अ=ध, ब=घ, क=म, इत्यादि.

∵ अ−ध+बक्ष−घक्ष+कक्ष^{2}−मक्ष^{2}+इत्यादि = ०,

म्हणजे, अ∽ध+(ब∽घ)क्ष+(क∽म)क्ष^{2}+इत्या० = ०;

आतां, अ∽ध=० नसेल, तर त्याच्या बरोबर एकादें अविकारी पद म घे,

तर, (ब∽घ)क्ष+(क∽म)क्ष^{2}+..... = म;

आणि ∵ अ आणि ध हीं अविकारी पदें आहेत, म्हणून अ∽ध म्हणजे म हें अविकारी पद आहे. परंतु ∵ क्षपदांत जसजसा फेरफार होईल त्याप्रमाणें मपदाच्या भिन्न भिन्न किंमती होतील, ∴ मपद विकारी आहे; म्हणजे म हें पद अविकारी आणि विकारी आहे, हें असणें अशक्य आहे;

$$\therefore अ \backsim ध = ०,\ म्हणजे\ अ = ध.$$

$$पुनः,\ ब - घ + (क - म)क्ष + \cdots = ०,$$

∴ वरल्या प्रमाणेंच ब = घ, आणि क = म, इत्यादि.

जर $अ + बक्ष + कक्ष^{२} + \cdots अ'य + ब'क्षय + \cdots + क'य^{२} \cdots =$
$ध + घक्ष + मक्ष^{२} + \cdots + ध'य + घ'क्षय + \cdots + म'य^{२} + \cdots$
आणि य पद विकारी असतां क्षपदास जर कांहीं एकादी अविकारी किंमत दिली, तर वरल्या प्रमाणेंच असें दाखवितां येईल, कीं

$$अ = ध,\ ब = घ,\ क = म,\ अ' = ध',\ ब' = घ',\ क' = म',\ इत्यादि.$$

उदाहरणें.

१. अशी कांहीं अपूर्णपदें काढ, कीं ज्यांची बेरीज

$$= \frac{२क्ष}{(क्ष^{२}+१)(क्ष^{२}+३)}$$

$$\frac{२क्ष}{(क्ष^{२}+१)(क्ष^{२}+३)} = \frac{अक्ष}{क्ष^{२}+१} + \frac{बक्ष}{क्ष^{२}+३}\ असें\ ये,\ तर$$

$$= \frac{अक्ष^{३}+३अक्ष+बक्ष^{३}+बक्ष}{(क्ष^{२}+१)(क्ष^{२}+३)},$$

$$\therefore २क्ष = (अ+ब)क्ष^{३} + (३अ+ब)क्ष,$$

$$\therefore २ = ३अ+ब,\ आणि\ (अ+ब)क्ष^{३} = ०,\ \therefore अ = -ब,$$

$$\therefore २ = -३ब + क = -२ब, \quad \therefore ब = -१, \quad \therefore अ = १;$$

$$\therefore \frac{२क्ष}{(क्ष^२+१)(क्ष^२+३)} = \frac{क्ष}{क्ष^२+१} - \frac{क्ष}{क्ष^२+३}.$$

२. $य^३ - ३य + क्ष = ०$, तर यची किंमत क्षच्या चढत्या घातांत काढ.

$य = अक्ष + बक्ष^३ + कक्ष^५ + डक्ष^७ + इ०$, असें घे;

$$\left.\begin{array}{l} तर\ य^३ = अ^३क्ष^३ + ३अ^२बक्ष^५ + ३अ^२कक्ष^७ + इ० \\ \qquad\qquad + ३अब^२क्ष^७ + इ० \\ -३य = -३अक्ष - ३बक्ष^३ - ३कक्ष^५ - ३डक्ष^७ - इ० \\ +क्ष = +क्ष \end{array}\right\} = ०,$$

आणि क्षच्या सारख्या घातांच्या वेळाप्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$$-३अ = -१, \therefore अ = \frac{१}{३}; \; अ^३ = ३ब, \therefore ब = \frac{अ^३}{३} = \frac{१}{३^४};$$

$$३अ^२ब = ३क, \quad \therefore क = अ^२ब = \frac{१}{३^६}, \text{ इत्यादि};$$

$$\therefore य = \frac{क्ष}{३} + \frac{क्ष^३}{३^४} + \frac{क्ष^५}{३^६} + \frac{क्ष^७}{३^८} + \frac{क्ष^९}{३^{१०}} + इ०.$$

$य = अक्ष + बक्ष^२ + कक्ष^३ + डक्ष^४ + इ०$, असें जर आपण घेतलें असतें, तर क्षच्या समघातांचे वेळाप्रकाशक शून्य आलें असतें.

उदाहरणें.

१. अशीं कांहीं अपूर्ण पदें काढ, कीं त्यांची बेरीज $= \frac{क्ष^{२}}{(क्ष^{२}-१)(क्ष-२)}$.

उत्तर. $\frac{४}{३(क्ष-२)} - \frac{१}{२(क्ष-१)} + \frac{१}{६(क्ष+१)}$.

२. असें सिद्ध कर कीं $\frac{१+२क्ष}{१-क्ष-क्ष^{२}} =$ $१+३क्ष+४क्ष^{२}+७क्ष^{३}+११क्ष^{४}+$ इत्यादि.

३. असें सिद्ध कर कीं $\sqrt{१+क्ष} = १+\frac{१}{२}क्ष-\frac{१}{८}क्ष^{२}+\frac{१}{१६}क्ष^{३}-$ इत्या०.

४. असें सिद्ध कर कीं $१^{२}+२^{२}+३^{२}+४^{२}+$ इ० $+न^{२} = \frac{न(न+१)(२न+१)}{६}$.

प्रकरण ११.

लागरथम.

(२७). $अ^{क्ष} = न$, तर अ पायास क्ष हें न संख्येचें लागरथम आहे असें म्हणतात, आणि हें क्ष = लाग$_{अ}$न ह्या समीकरणानें दाखवितात. लागरथमाची

जी रीति प्रचारांत आहे तींत अची किंमत=१०,आणि ०, १, २, ३, ४; ··· क्ष, हीं १, १०, १००, १०००, १००००, ···· $१०^{क्ष}$, ह्या संख्यांचीं लागरथमें आहेत; म्हणजे ज्यांचीं लागरथमें घ्यावयाचीं त्या संख्या भूमितिश्रेढीं-त आहेत, आणि त्यांचीं लागरथमें गणितश्रेढींत आहेत.

$अ^{क्ष}=न$ ह्या समीकरणांतून क्षची किंमत काढून तिचेयोगानें लागरथमिक कोष्टकें तयार केलीं आहेत. ह्या समीकरणापासून क्षची किंमत कशी काढावी, हें पुढें २१व्या कलमांत सांगितलें आहे.

सिद्धांत.

१. दोन संख्यांच्या लागरथमांची बेरीज त्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचें लागरथम आहे.

∵ (पाया अ धरून) क्ष=लाग०न, य=लाग०न'ये, तर $अ^{क्ष}=न$, $अ^{य}=न'$, ∴ $अ^{क्ष}अ^{य}=नन'$, म्हणजे $अ^{क्ष+य}=नन'$.

दोंहोंहून अधिकही संख्या असल्या तरी ह्या प्रमाणेंच जाणावें.

२. दोन संख्यांच्या लागरथमांची वजाबाकी त्या दोन संख्यांच्या भागाकाराचें लागरथम आहे

$\because$ $अ^{क्ष} = न$, $अ^{य} = न'$, $\therefore \frac{अ^{क्ष}}{अ^{य}} = \frac{न}{न'}$, म्हणजे $अ^{क्ष-य} = \frac{न}{न'}$.

३. $न^{म}$ ह्याचें लागरथम $=$ म $\times$ लाग॰न.

कारण, $\because न = अ^{क्ष}$, $\therefore न^{म} = अ^{मक्ष}$, $\therefore$ लाग॰$न^{म}$ $=$ मक्ष $=$ म $\times$ लाग॰न

४. $\sqrt[म]{न}$ ह्याचें लागरथम $= \frac{\text{लाग न}}{म}$

कारण, $\because न = अ^{क्ष}$, $\therefore न^{\frac{1}{म}} = अ^{\frac{क्ष}{म}}$, $\therefore$ लाग॰$न^{\frac{1}{म}} = \frac{क्ष}{म} = \frac{\text{लाग॰न}}{म}$.

ह्यावरून संख्यांचा गुणाकार आणि भागाकार, त्यासंख्यांच्या लागरथमांच्या बेरजेनें आणि वजाबाकीनें करतां येतो, आणि त्यांचे वर्गघनादि घात किंवा मूळें, त्यांचे लागरथमास इष्ट घातप्रकाशक किंवा इष्ट मूळप्रकाशक आंकड्यानें गुणून किंवा भागून करतां येतात.

उदाहरणें.

१. जर क्ष $=$ अब, तर लाग॰क्ष $=$ लाग॰अ $+$ लाग॰ब.

२. जर य $= ६$अक, तर लाग॰य $=$ लाग॰६ $+$ लाग॰अ $+$ लाग॰क.

३. जर क्ष $= \frac{म}{न}$, तर लाग॰क्ष $=$ लाग॰म $-$ लाग॰न.

४. जर य $= अ^{३}$, तर लाग॰य $= ३$ लाग॰अ

५. जर $ज्ञ = \sqrt[४]{क}$, तर $लाग॰ ज्ञ = \frac{१}{४} लाग॰ क$.

६. जर $स = अ \cdot \frac{र^{न} - १}{र - १}$, तर लागरथमांत नची किंमत काढ.

$स(र-१) = अर^{न} - अ$, $अर^{न} = स(र-१) + अ$, $र^{न} = \frac{स(र-१)+अ}{अ}$,

$\therefore न \cdot लाग॰ र = लाग॰ \{स(र-१)+अ\} - लाग॰ अ$,

$$\therefore न = \frac{लाग॰ \{स(र-१)+अ\} - लाग॰ अ}{लाग॰ र}.$$

७. जर $५^{क्ष} = ४००$, तर क्षची किंमत काढ.

$$क्ष लाग॰ ५ = लाग॰ ४०० ,$$

$$\therefore क्ष = \frac{लाग॰ ४००}{लाग॰ ५} = \frac{२.६०२०६०}{.६९८९७०} = \text{सुमारें } ३.७२.$$

ब्रिगसाहेबानें जें लागरथमांचें कोष्टक केलें आहे त्यांतून वरच्या उदाहरणांत ४०० आणि ५ ह्यांचीं लागरथमें घेतलीं आहेत.

लागरथमाचे संख्यांत दशांशचिन्हामागें जो आंकडा असतो त्यास **पूर्णांक** (व्यावर्तक) म्हणतात, आणि तो, ज्या संख्येचें लागरथम काढावयाचें असतें त्या संख्येंत जितके पूर्णांक आंकडे असतात त्या आंकड्यांच्या संख्येंत एक उणा करून बाकी जी संख्या

राहते, तीच्या बरोबर असतो. जसें, ४०० ह्यांत तीन पूर्णांक आंकडे आहेत, म्हणून त्याच्या लागरथमांत २ पूर्णांक आहेत. म्हणून लागरथमांच्या कोष्टकांत पूर्णांक लिहिलेले नसतात.

१७५२ ह्यांचें लागरथम = ३·२४३५३४.

१७५·२ .... = २·२४३५३४.

१७·५२ .... = १·२४३५३४.

१·७५२ .... = –०·२४३५३४.

·१७५२ .... = –१·२४३५३४.

·०१७५२ .... = –२·२४३५३४.

इ०   इ०

प्रकरण १२.

द्विपदसिद्धांत.

(२८). द्विपदसिद्धांताचे योगानें द्विपदाचा कोणताही घात वारंवार गुणाकार केल्याशिवाय आपणास करतां येतो.

अ+क्ष ह्या द्विपदाचा न घात करावयाचा आहे.

$अ+क्ष = अ\left(१+\frac{क्ष}{अ}\right), \therefore (अ+क्ष)^{न} = अ^{न}\left(१+\frac{क्ष}{अ}\right)^{न};$

अशी कल्पना करा कीं $\frac{ब}{अ}$ = य, आणि $(१+य)^{न} = अ_{१} + बय + कय^{२} + डय^{३} + \cdots प_{१}य^{प} + इत्यादि \cdots (१)$,

ह्यांत $अ_{१}$, ब, क, ड, इ॰, वेळाप्रकाशकांचा यच्या किमतीशीं कांहीं संबंध नाहीं.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचा वर्ग केल्यानें,

$$\left.\begin{aligned}(१+य)^{२न} = अ_{१}^{२} &+ २अ_{१}बय + २अ_{१}कय^{२} + २अ_{१}डय^{३} + २अ_{१}इय^{४} + इत्यादि \\ &+ ब^{२}य^{२} + २बकय^{३} + २बडय^{४} + इत्यादि \\ &+ क^{२}य^{४} + इत्यादि\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (२).$$

आतां $\because (१+य)^{२न} = (१+२य+य^{२})^{न} = \{१+(२य+य^{२})\}^{न}$, $\therefore$ (१) ह्यांतील कल्पनेप्रमाणें,

$$(१+य)^{२न} = अ_{१} + ब(२य+य^{२}) + क(२य+य^{२})^{२} + ड(२य+य^{२})^{३} + इत्यादि,$$

$$\left.\begin{aligned}= अ_{१} &+ २बय + बय^{२} + ४कय^{२} + कय^{४} + इत्यादि \\ &+ ४कय^{३} + ८डय^{३} + १६इय^{४} + इत्यादि\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (३)$$

आणि $\because$ (२) आणि (३) ह्या श्रेढींतील प्रत्येक $= (१+य)^{२न}$,

$\therefore अ_1 + २अ_1बय + (२अ_1क + ब^2)य^2 + (२अ_1ड + २बक)य^3 + \ldots\ldots इ० =$

$अ_1 + २बय + (ब + ४क)य^2 + (४क + ८ड)य^3 + \ldots\ldots\ldots इ०$

$\therefore$ (२६ कल० म०) $अ_1^2 = अ_1, \therefore अ_1 = १;\quad २अ_1ब = २ब, \therefore ब = ब;$

$$२अ_1क + ब^2 = ब + ४क, \quad \therefore क = \frac{ब^2 - ब}{२} = \frac{ब(ब-१)}{१\cdot२};$$

$$२अ_1ड + २बक = ४क + ८ड, \quad \therefore ड = \frac{२क(ब-२)}{६} = \frac{ब(ब-१)(ब-२)}{१\cdot२\cdot३}; इ$$

म्हणून, $(१+य)^न = १ + बय + \frac{ब(ब-१)}{१\cdot२}य^2 + \frac{ब(ब-१)(ब-२)}{१\cdot२\cdot३}य^3 + इ० \ldots\ldots (४).$

बयच्या पुढें जितकीं पदें आहेत, त्या सर्वांचे जागीं मय² माडल्यानें,

$(१+य)^न = १ + बय + मय^2$, $\therefore$ (२७ कल० म०), न लाग० $(१+य)$ = लाग० $(१ + बय + मय^2)$,

आणि जर असें कल्पिलें की, लाग० $(१+य) = ध + घय + म्रय^2 + इ०$, ज्यांत ध, घ, म्र, इ०, येआमकांचा यचे किंमतीशीं कांहीं संबंध नाहीं; तर

$$लाग०\left\{१ + (बय + मय^2)\right\} = ध + घ(बय + मय^2) + म्र(बय + मय^2)^2 + इत्यादि,$$

$\therefore$ नध + नधघय + न ध्र य² + इत्या० = ध + बघय + घमय² + इत्यादि,

$\because$ (२६ कल० प्र०) नध = ध, $\therefore$ ध ... नघ = घब, $\therefore$ ब = न; म्हणून, (४) ह्यांत बचे जागीं न मांडल्यानें,

$$(1+\text{य})^{\text{न}} = 1 + \text{नय} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\text{य}^2 + \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{य}^3 + \text{इत्यादि},$$

म्हणजे, $\left(1+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}\right)^{\text{न}} = 1 + \text{न}\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\text{क्ष}^3}{\text{अ}^3} + \text{इत्यादि},$

$$\therefore (\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}}\left(1+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}\right)^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}} + \text{न}\,\text{अ}^{\text{न}-1}\text{क्ष} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\text{अ}^{\text{न}-2}\text{क्ष}^2 + \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{अ}^{\text{न}-3}\text{क्ष}^3 + \text{इ०},$$

ह्यास सरऐजाकन्युटनचा द्विपद सिद्धांत म्हणतात.

कुरलरी १. क्षजर ऋण असेल तर त्याचे समघातांचीं पदें धन होतील, आणि विषम घातांचीं ऋण होतील;

म्हणून, $(\text{अ}-\text{क्ष})^{\text{न}} = \text{अ}^{\text{न}} - \text{अ}^{\text{न}-1}\text{क्ष} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\text{अ}^{\text{न}-2}\text{क्ष}^2 - \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{अ}^{\text{न}-3}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}.$

कुरल० २. जर अ = १, तर $(\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{न}} = 1 + \text{नक्ष} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\text{क्ष}^2 + \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}.$

$\because (\text{अ}+\text{ब}+\text{क})^{\text{न}} = \{\text{अ}+(\text{ब}+\text{क})\}^{\text{न}}$, आणि $(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\text{ड})^{\text{न}} = \{(\text{अ}+\text{ब})+(\text{क}+\text{ड})\}^{\text{न}}$

∴ हा द्विपदसिद्धांत, बहुतपदांचा देखील कोणताही घात करावयास लागू करतां येईल.

वरील सिद्धता व्यापक आहे, म्हणून नची किंमत पूर्णांक किंवा अपूर्णांक, धन किंवा ऋण, असली तरी ह्या सिद्धांताची योजना करतां येईल.

ह्या सिद्धांताचा सूक्ष्मतेनें विचार करून पाहिलें असतां असें दिसतें, कीं आरंभापासून अनुक्रमें पुढील सर्व पदांत अचा घात एकानें कमी होत जातो, आणि क्षचा घात एकानें अधिक होत जातो.

पहिलें पद द्विपदाच्या पहिल्या पदाचा न घात असतो. पहिल्या पदाचा घातप्रकाशक, एकोन घातप्रकाशक असेंसें पहिलें पद, आणि द्विपदाचें दुसरें पद, ह्यांचा गुणाकार केल्यानें दुसरें पद काढतां येतें. पुढील कोणत्याही पदाचा वेळाप्रकाशक त्याच्या पाठीमागल्या पदांतील अच्या वेळाप्रकाशकास त्याच्याच घातप्रकाशकानें गुणून त्या गुणाकारास पदसंख्येनें (जीं पदें लिहिलीं असतील त्यांचे संख्येनें,) भागिलें असतां निघतो.

ह्या सिद्धांतानें द्विपद घातविस्तार करतांना असें लक्ष्यांत येईल कीं जेव्हां न पूर्णांक आहे, तेव्हां द्विपदाच्या विस्तारांत न+१ पदें येतात; आणि आद्यंत पदांपासून जीं पदें सारखे अंतरावर आहेत त्यांचे वेळाप्रकाशक बरोबर असतात. जेव्हां न अपूर्णांक आहे, तेव्हां श्रेढी-चा शेवट होत नाहीं.

उदाहरणें.

१. (अ+क्ष) ह्याचा षड्घात कर.

$$(अ+क्ष)^{६} = अ^{६} + ६अ^{५}क्ष + \frac{६\cdot५}{२}अ^{४}क्ष^{२} + \frac{६\cdot५\cdot४}{२\cdot३}अ^{३}क्ष^{३} + \frac{६\cdot५\cdot४\cdot३}{२\cdot३\cdot४}अ^{२}क्ष^{४} + \frac{६\cdot५\cdot४\cdot३\cdot२}{२\cdot३\cdot४\cdot५}अक्ष^{५} + \frac{६\cdot५\cdot४\cdot३\cdot२\cdot१}{२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६}क्ष^{६}$$

$$= अ^{६} + ६अ^{५}क्ष + १५अ^{४}क्ष^{२} + २०अ^{३}क्ष^{३} + १५अ^{२}क्ष^{४} + ६अक्ष^{५} + क्ष^{६}.$$

घातविस्तार करतांना दुसऱ्या पदाच्या पुढल्या पदांचे वेळाप्रकाशक पुढील प्रमाणें काढतात. $\frac{६\times५}{२} = १५$, $\frac{१५\times४}{३} = २०$, आणि मध्यपदाच्या पुढें ते व्यस्तरीतीनें लिहितात.

२. असें सिद्ध कर कीं $(अ-क्ष)^{५} =$

$$अ^{५} - ५अ^{४}क्ष + १०अ^{३}क्ष^{२} - १०अ^{२}क्ष^{३} + ५अक्ष^{४} - क्ष^{५}$$

३. असें सिद्ध करा कीं $(अ-क्ष)^{७} = अ^{७} - ७अ^{६}क्ष + २१अ^{५}क्ष^{२} - ३५अ^{४}क्ष^{३} + ३५अ^{३}क्ष^{४} - २१अ^{२}क्ष^{५} + ७अक्ष^{६} - क्ष^{७}$

४. असें सिद्ध करा कीं $(२क्ष+१)^{५} =$

$$३२क्ष^{५} + ८०क्ष^{४} + ८०क्ष^{३} + ४०क्ष^{२} + १०क्ष + १.$$

५. असें सिद्ध करा कीं $\frac{१}{(क+क्ष)^{२}} = (क+क्ष)^{-२} =$

$$\frac{१}{क^{२}}\left(१ - \frac{२क्ष}{क} + \frac{३क्ष^{२}}{क^{२}} - \frac{४क्ष^{३}}{क^{३}} + \frac{५क्ष^{४}}{क^{४}} - \text{इत्यादि}\right).$$

६. असें सिद्ध करा कीं $\sqrt[३]{१-क्ष^{३}} = (१-क्ष^{३})^{\frac{१}{३}} =$

$$१ - \frac{क्ष^{३}}{३} - \frac{क्ष^{६}}{९} - \frac{५क्ष^{९}}{८१} - \text{इत्यादि}.$$

घातप्रकाशक सिद्धांत

(२१). $\because अ = १ + \overline{अ-१}, \quad \therefore अ^{क्ष} = (१+\overline{अ-१})^{\frac{न क्ष}{न}} =$

$$\left\{(१+\overline{अ-१})^{न}\right\}^{\frac{क्ष}{न}};$$

$\therefore$ (द्विपदसि० ३कुरल०प्र०), $अ^{क्ष} = \left\{१ + न(अ-१) + \frac{न(न-१)}{२}(अ-१)^{२}\right.$

$$\left. + \frac{न(न-१)(न-२)}{२\cdot३}(अ-१)^{३} + \text{इ०}\right\}^{\frac{क्ष}{न}},$$

$$= \left\{१ + \left[(अ-१) - \frac{(अ-१)^{२}}{२} + \frac{(अ-१)^{३}}{३} - \text{इ०}\right]न + बन^{२} + कन^{३} + \text{इ०}\right\}^{\frac{क्ष}{न}}$$

येथें (अ−१) ह्याचे घातांचीं जीं पदें $न^{२}$, $न^{३}$, इत्यादिकां-
स गुणक येतात त्या पदांचे बेरजेबद्दल ब, क, इत्यादि
पदें घेतलीं आहेत.

आतां $(अ-१) - \frac{(अ-१)^{२}}{२} + \frac{(अ-१)^{३}}{३} - इ० = अ_{१}$ घेतर

$$अ^{क्ष} = \left\{ १ + अ_{१}न + बन^{२} + कन^{३} + इ० \right\}^{\frac{क्ष}{न}} =$$

$$१ + \frac{क्ष}{न}(अ_{१}न + बन^{२} + इ०) + \frac{\frac{क्ष}{न}\left(\frac{क्ष}{न} - १\right)}{२}(अ_{१}न + बन^{२} + इ०)^{२} + इ०,$$

$$= १ + क्ष(अ_{१} + बन + इ०) + \frac{क्ष(क्ष-न)}{२}(अ_{१} + बन + इ०)^{२} + इ०;$$

आतां ∵ न पदास कोणतीही किंमत दिली तरी हें समीकरण
खरें आहे न = ० घे, तर

$$अ^{क्ष} = १ + अ_{१}क्ष + \frac{अ_{१}^{२}क्ष^{२}}{१\cdot२} + \frac{अ_{१}^{३}क्ष^{३}}{१\cdot२\cdot३} + इ०,$$ ह्यास घात-
प्रकाशकसिद्धांत म्हणतात.

अची किंमत इ अशी धरली कीं $अ_{१} = १$, तर

$$इ^{क्ष} = १ + \frac{क्ष}{१} + \frac{क्ष^{२}}{१\cdot२} + \frac{क्ष^{३}}{१\cdot२\cdot३} + \frac{क्ष^{४}}{१\cdot२\cdot३\cdot४} + इत्यादि.$$

जर क्ष = १, तर

$$इ = १ + \frac{१}{१} + \frac{१}{१\cdot२} + \frac{१}{१\cdot२\cdot३} + \frac{१}{१\cdot२\cdot३\cdot४} + इ० = २\cdot७१८२८इ० ;$$

लागरथमांचा प्रथम कल्पक जो नेपियर साहेब त्यानें जीं लागरथमिककोष्टकें तयार केलीं त्यांचा २·७१८२८ हा पाया आहे.

$अ^{क्ष} = न$ ह्या समीकरणांत क्षची किंमत काढ.

दोंहीं बाजूंचा ज्ञघात केल्यानें, $अ^{ज्ञक्ष} = न^{ज्ञ}$,

आणि दोनही बाजू घात प्रकाशक सिद्धांताप्रमाणें वाढविल्यानें,

$$१ + \frac{थक्षज्ञ}{१} + \frac{थ^२क्ष^२ज्ञ^२}{१\cdot२} + \ldots = १ + \frac{न_१ज्ञ}{१} + \frac{न_१^२ज्ञ^२}{१\cdot२} + \ldots ,$$

येथें $थ = (अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^२ + \frac{१}{३}(अ-१)^३ - \ldots ,$

आणि $न_१ = (न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^२ + \frac{१}{३}(न-१)^३ - \ldots ,$

ज्ञच्या समघातांच्या वेळा प्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$$थक्ष = न_१, \text{ म्हणजे } क्ष = \frac{न_१}{थ} =$$

$$\frac{(न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^२ + \frac{१}{३}(न-१)^३ - \ldots}{(अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^२ + \frac{१}{३}(अ-१)^३ - \ldots}.$$

आतां $अ^{क्ष} = न$, म्हणून (२७ कल० प्र०) अ पायास क्ष हें न संख्येचें लागरथम आहे. ह्याकरितां कोणतेही पायास कोणतेही संख्येचें लागरथम वरील समीकरणानें

काढतां येईल. हल्लीं प्रचारांत जीं लागरथमिक कोष्टकें आहेत, तीं ब्रिगसाहेबानें केलीं आहेत. त्यांत त्यानें अ ची किंमत १० घेतली आहे.

जर वरचे समीकरणांत असें मानलें कीं न−१=र,

आणि $\frac{1}{(अ-1)-\frac{1}{2}(अ-1)^2+\frac{1}{3}(अ-1)^3-\cdots}=म$,

तर क्ष=लाग$_{अ}$(र+१)=म$\{र-\frac{1}{2}र^2+\frac{1}{3}र^3-\frac{1}{4}र^4+\cdots\}$

जेव्हां र ची किंमत फारच [illegible] कमी म्हणजे अपूर्णांक आहे, तेव्हां मात्र वरील [illegible] श्रेढीनें (र+१) ह्या संख्येचें लागरथम स्वल्पायास[illegible] [illegible]नें काढतां येतें; परंतु जेव्हां र ची किंमत अपूर्ण[illegible] [illegible] [illegible]क नाहीं, तेव्हां वरील श्रेढीनें (र+१) ह्या संख्येचें ल[illegible]गरथम स्वल्पायासानें काढतां येत नाहीं.

[illegible]रील समीकरणांत नचे जागीं −न लिहून दोन [illegible] हीं समीकरणें मांड;

$$\left.\begin{array}{l} लाग_{अ}(1+र)=म(+र-\frac{1}{2}र^2+\frac{1}{3}र^3-\frac{1}{4}र^4+\cdots) \\ लाग_{अ}(1-र)=म(-र-\frac{1}{2}र^2-\frac{1}{3}र^3-\frac{1}{4}र^4-\cdots) \end{array}\right\}$$ [illegible]

$$लाग_{अ}(1+र)-लाग_{अ}(1-र)=लाग_{अ}\frac{1+र}{1-र}=$$

$$2म\{र+\frac{1}{3}र^3+\frac{1}{5}र^5+\cdots\}$$

आतां $य = \frac{१}{२प+१}$ घे, तर $\frac{१+य}{१-य} = \frac{प+१}{प}$, म्हणून

$$लाग_{अ}\frac{प+१}{प} = लाग_{अ}(प+१) - लाग_{अ}प =$$

$$२म\left\{\frac{१}{२प+१} + \frac{१}{३(२प+१)^३} + \frac{१}{५(२प+१)^५}\right\},$$

$$\therefore लाग_{अ}(प+१) = लाग_{अ}प + २म\left\{\frac{१}{२प+१} + \frac{१}{३(२प+१)^३} + \frac{१}{५(२प+१)^५}\right\}.$$

जेव्हां प संख्येचें लागरथम माहीत आहे तेव्हां (प+१) ह्या संख्येचे लागरथम वरील श्रेढीनें काढतां येतें, आणि जसजशी प ची किंमत मोठी होते, तसतशी (प+१) ह्या संख्येचें लागरथम वरील श्रेढीनें लवकर निघतें.

(३०). $\because अ+ब = \frac{अ}{१-\frac{ब}{अ+ब}}$,

$$\therefore (अ+ब)^न = \frac{अ^न}{\left(१-\frac{ब}{अ+ब}\right)^न} = अ^न\left(१-\frac{ब}{अ+ब}\right)^{-न},$$

$\therefore$ (२८ कल० म०), $(अ+ब)^न =$

$$अ^न\left\{१+न\left(\frac{ब}{अ+ब}\right) + \frac{न(न-१)}{२}\left(\frac{ब}{अ+ब}\right)^२ + इ०\right\}.$$

ह्यास कोलसन साहेबाचा सिद्धांत म्हणतात.

प्रकरण १२.

पाक्षिकविपर्यय, सार्वांशिकविपर्यय, आणि संयोग.

(७१). किती एक पदांतून प्रत्येकवेळीं कांहीं नियमित पदें घेतलीं असतां, त्या पदांच्या ज्या भिन्न भिन्न रचना होतात त्यांस त्यांचे पाक्षिकविपर्यय म्हणतात.

जसें जर, अ, ब, क, ह्या तीन पदांतून दोन दोन पदें प्रत्येकवेळीं घेतलीं तर त्या तीन पदांचे पाक्षिकविपर्यय अब, बअ, अक, कअ, बक, कब, होतील.

जर सगळीं पदें प्रत्येकवेळीं घेतलीं, तर जे त्यांचें पाक्षिक विपर्यय होतात त्यांस त्यांचे सार्वांशिक

याजक म्हणतात.

जसें अ, ब, क, ह्यांचे सार्वांशिकविपर्यय अबक, अकब, बअक, बकअ, कअब, कबअ. हे होतात.

(७२). जर न संख्याक भिन्नभिन्न पदांतून र संख्याक पदें प्रत्येकवेळीं घेतलीं तर त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची संख्या = न(न-१)(न-२)...{न-(र-१)}.

अ, ब, क, ड, इ०, न संख्यांक पदें घे; तर एकेक पद घेतल्यानें त्यांचे पाक्षिक विपर्ययांची संख्या न इहोल.

ह्या पदांतील (न-१) म्हणजे ब, क, ड, इ-त्यादि पदें घेऊन त्यांतून प्रत्येक पद घेतलें, तर त्यांचे पाक्षिक विपर्ययांची संख्या (न-१) होईल; आणि त्या प्रत्येकाचे पूर्वी अ लिहिला, तर न पदांतून प्रत्येक वेळीं, ज्यांत अ प्रथम पद आहे, अशीं दोन दोन पदें घेतल्यानें, न पदांचे (न-१) पाक्षिक विपर्यय होतील; ह्या प्रमाणेंच, ज्यांत ब प्रथम आहे, अशीं दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं, तर न पदांचे (न-१) पाक्षिक विपर्यय होतील; आणि ह्या प्रमाणेंच सर्व न पदांि ईल, म्हणून न पदांतून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं असतां न पदांचे एकंदर पाक्षिक विपर्यय न(न-१) होतील.

पुनः, वरील पदांतील (न-१) म्हणजे ब, क, इत्यादि पदें घेऊन त्यांतून प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं तर वरचे प्रमाणें (न-१) पदांचे (न-१)(न-२)

इतके पाक्षिक विपर्यय होतील ; आणि पुढें वरल्याप्रमाणेंच कृति केल्यानें, न पदांतून प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदें घेतलीं असतां न पदांचे पाक्षिक विपर्यय न(न−१)(न−२) होतील.

ह्याच प्रमाणें न पदांतून चार चार पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं तर न पदांचे पाक्षिक विपर्यय न(न−१)(न−२)(न−३) होतील.

म्हणून, जर न पदांतून १, २, ३, इत्यादि र पदें प्रत्येक वेळीं अनुक्रमें घेतलीं असतां न पदांचे जे पाक्षिक विपर्यय येतील, ते दाखवायास $व_१$, $व_२$, $व_३$, इत्यादि $व_र$, हीं अक्षरें घेतलीं, तर

$$व_१=न,\ व_२=न(न-१),\ व_३=न(न-१)(न-२), इ॰$$

$$त्याजवरून\ व_र=न(न-१)(न-२)(न-३)\ ;\cdots\{न-(र-१)\},$$

कुरल १. ∵ न पदांतून प्रत्येक वेळीं सगळीं पदें एकदम घेतलीं असतां जे त्यांचे पाक्षिक विपर्यय होतात, तेच त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय होतात ; ∴ रचे जागीं न लिहिल्यानें (आणि सार्वांशिक विपर्यय = प मानल्यानें),

$$प=न(न-१)(न-२)\cdots\cdots\{न-(न-२)\}\{न-(न-१)\},$$

$= न(न-१)(न-२)\cdots २\cdot१ = १\cdot२\cdot३\cdot४\cdots न.$

(३३). आपण वर असें मानलें आहे कीं न संख्याक पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे; परंतु जेव्हां त्यांतील कांहीं पदें एकच आहेत, तेव्हां वर आणलेले सार्वांशिक विपर्यय बराबर नाहींत, ह्याकरितां त्यांत कांहीं फेरफार केला पाहिजे.

अ आणि ब हीं पदें जेव्हां भिन्न आहेत, तेव्हां त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय अब, बअ, आहेत; परंतु जेव्हां हीं पदें एकच अ आहेत, तेव्हां त्यांचा सार्वांशिक विपर्यय अअ आहे. म्हणून ह्या न संख्याक पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे असें मानून वर आणलेले जे सार्वांशिक विपर्यय त्यांस, जेव्हां त्यांतील दोन पदें अ, ब, सारखींच होतात, म्हणजे अ=ब होय, तेव्हां दोहोंनीं भागिलें पाहिजे; कांकीं पदरचनेंतील प्रत्येक पदांत अ, ब, हीं दोन्ही पदें जेव्हां सारखीं होतात, तेव्हां पदरचनेंतील प्रत्येक पद दोनदां आलें असें होतें.

आणि पुनः, जेव्हां न संख्याक पदांतील अ, ब, क, हीं पदें भिन्न भिन्न आहेत, तेव्हां पदरचनेंत

हीं पदें क्रमभेदानें साहा वेळ, म्हणजे २×३ वेळ, येतात; म्हणून जेव्हां अ, ब, क, हीं पदें सारखींच होतात, म्हणजे अ=ब =क, तेव्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणलेले त्या न संख्याक पदांचे सार्वांशिक विपर्ययांस २×३ ह्यांनीं भागिलें पाहिजे; म्हणजे जेव्हां अ=ब=क तेव्हां जे न संख्याक पदांचे सार्वांशिक विपर्यय ते=प, तर

$$\text{प} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots३\cdot२\cdot१}{२\cdot३} = \text{न}\cdot(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots४\cdot$$

आणखी असें मान कीं, न सं[illegible]ख्याक पदांतील र संख्याक पदें सारखीं आहेत [illegible] आतां जर प्रत्येक पद भिन्न भिन्न असतें तर [illegible] दोन [illegible] संख्याक पदांचे सार्वांशिक विपर्यय न·(न−१)[illegible] (न−२)····३·२·१ झाले असते, आणि पद-[illegible] याज [illegible] र संख्याक पदें क्रमभेदानें, त्यांचे जे सार्वां-[illegible]र्यय १·२·३····र, इतके वेळां आलीं असतीं; म्हणून जेव्हां हीं र संख्याक पदें सारखींच होतात, तेव्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणलेले जे न संख्याक पदांचे सार्वांशिक विपर्यय, त्यांस १·२·३··· र ह्यांनीं भागिलें पाहिजे; म्हणजे, जेव्हां र संख्याक पदें सारखींच आहेत, तेव्हां जे न संख्याक पदांचे सार्वां-

शिक विपर्यय ते = प, तर

$$प = \frac{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdots\cdots न}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots र}.$$

कुर जेव्हां न संख्याक पदांत र संख्याक पदें सारखीं असून दुसरीं क संख्याकही पदें सारखीं आहेत, तेव्हां जे नसंख्याक पदांचे सार्वांशिक विपर्यय येतील ते = प, तर वरचे प्रमाणेंच

$$प = \frac{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdots\cdots न}{१\cdot२\cdots र\cdot१\cdot२\cdots क}.$$

(३४). जेव्हां न संख्याक पदांतील कोणतेही एक पद, कितीएक पदें, किंवा सर्व पदें पुनःपुनः घेतां येतात, तेव्हां जे नसंख्याक पदांचे पाक्षिक विपर्यय त्यांस — आवृत्त पाक्षिकविपर्यय म्हणतात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन पदांतील प्रत्येकाचे पूर्वी एकएक लिहिलें, तर ज्यांत अ पद पूर्वी आहे असे अअ, अब, अक, तीन पाक्षिकविपर्यय होतील; आणि ह्याप्रमाणच ज्यांत ब पूर्वी आहे असे, बअ, बब, बक, तीन पाक्षिक विपर्यय होतील, आणि क ज्यांत पूर्वी आहे असे, कअ, कब, कक, तीन पाक्षिकविपर्यय होतील; म्हणून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतल्यानें, अ, ब, क,

ह्या तीन पदांचे एकंदर पाक्षिकविपर्यय ३×३, म्हणजे $3^2 = 9$, होतील.

ह्याप्रमाणेंच जर नसंख्याक पदांतील प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं, तर ज्यांत अ प्रथमतः येईल असे न पाक्षिकविपर्यय होतील, व ज्यांत प्रथमतः येईल, असे नच पाक्षिकविपर्यय होतील, आणि असेंच नसंख्याक पदांतील प्रत्येक पदाविषयीं होईल, म्हणून न पदांचे एकंदर आवृत्त पाक्षिकविपर्यय, न×न=$न^2$ होतील.

प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदें घेतलीं तर न पदांचे आवृत्त पाक्षिकविपर्यय $न^2$ होतात, आतां जर प्रत्येक पाक्षिकविपर्ययाचे पूर्वीं नपदांतील प्रत्येक ठेविलें तर, वरचेप्रमाणें प्रत्येकवेळीं तीन तीन पदें घेतलीं असतां नसंख्याक पदांचे एकंदर पाक्षिक विपर्यय न×$न^2$=$न^3$ होतील.

ह्याप्रमाणेंच जर प्रत्येकवेळीं न पदें घेतलीं, तर न पदांचे आवृत्त पाक्षिकविपर्यय $न^न$ होतील.

आतां जर एकएकदां, दोन एकदां, तीन एकदां, इत्यादि, न एकदां घेतल्यानें नसंख्याक पदांचे एकंदर

आवृत्त पाक्षिक विपर्यय किती होतील हें काढणें आहे तर, $न+न^{२}+न^{३}+\cdots+न^{न}=न\left\{\frac{न^{न}-१}{न-१}\right\}$ हें पद घ्यावें म्हणजे झालें.

(३५). कांहीं वस्तू घेऊन क्रमाकडे लक्ष्य न ठेवितां जे भिन्न भिन्न समुदाय होतात त्यांस त्या पदांचे संयोग म्हणतात. जसें, अ, ब, क, ह्या पदांतून प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदें घेतल्यानें त्यांचे संयोग अब, अक, बक, होतात

आतां अ, ब, ह्या दोन पदांचे सार्वांशिक विपर्यय अब, बअ, असे दोन होतात, परंतु ह्यांचा संयोग अब एकच होतो, आणि असेंच अ, ब, क, ह्यांचे सार्वांशिक विपर्यय ६ होतात, परंतु ह्यांचा संयोग एकच होतो. जर प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदें घ्यावीं तर न पदांचे पाक्षिक विपर्यय न (न-१) होतात, परंतु दोन पदांचा संयोग एकच होतो, आणि त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय दोन होतात, म्हणून दोन दोन पदें प्रत्येक वेळीं घेतलीं असतां, न पदांचे संयोग $=क_{२}=\frac{न(न-१)}{२}$.

पुनः, जर प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदें घेतलीं तर न पदांचे पाक्षिकविपर्यय न (न-१)(न-२) होतात,

परंतु अ, ब, क, ह्यांचा संयोग एकच होतो, आणि सार्वांशिक विपर्यय २.४.३ होतात, म्हणून प्रत्येक वेळीं तीन तीन घेतलीं असतां,

$$\text{न पदांचे संयोग} = क_३ = \frac{न(न-१)(न-२)}{२}.$$

असेंच प्रमाणेंच विचार करून पाहिलें असतां असें दिसतें कीं, प्रत्येक वेळीं र पदें घेतलीं. आणि न संख्याक पदांचे संयोग $= क_र$, तर

$$क_र = \frac{न(न-१)(न-२)\cdots\{न-(र-१)\}}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots र}.$$

कुर०. र पदांचे संयोग जर अनुक्रमें १, २, ३, ४, इत्यादि पदें घेतलीं, तर

$$क_१ = \frac{न}{१},\quad क_२ = \frac{न(न-१)}{१\cdot२},\quad क_३ = \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३}, इ०;$$

$$\text{यांची बेरीज } क_१ + क_२ + क_३ + इ० = न + \frac{न(न-१)}{१\cdot२} + \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३} + इ०,$$

$$\text{परंतु (२८ कल० प्र०)}, (१+क्ष)^न =$$

$$१ + नक्ष + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}क्ष^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३}क्ष^३ + इ०,$$

$$\therefore (१+१)^न = २^न = १ + न + \frac{न(न-१)}{१\cdot२} + \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३} + इ०,$$

$$\therefore २^न - १ = न + \frac{न(न-१)}{१\cdot२} + \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३} + इ०,$$

$\therefore$ क$_1$+क$_2$+क$_3$+इ० = $२^न - १$ = नै पदांतून एक, दोन, तीन, इत्यादि न अनुक्रमें प्रत्येक वेळीं घेतल्यानें जे त्यांचे संयोग होतात त्या सर्वांची बेरीज.

(३६). ज्यांत अनुक्रमें प, क्क, र, इ० संख्याक पदें आहेत, अशा न रांगी आहेत, आणि प्रत्येक संयोगास प्रत्येक रांगींतून एक एक पद घेतलें, तर एकंदर संयोग = प, क्क, र, इ० ह्या सर्व पदसंख्यांचा गुणाकार.

$\because$ असें समज कीं ज्यांत अनुक्रमें प संख्याक आणि क्क संख्याक पदें आहेत अशा दोन रांगी आहेत. तर हें स्पष्ट आहे कीं जर पहिले रांगेंतील कोणतेंही एक पद घेऊन तें आणि दुसरींतील प्रत्येक पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग क्क होतील; म्हणून पहिलींतील प्रत्येक पद आणि दुसरींतील प्रत्येक पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग पक्क होतील. पुनः, जर र संख्याक पदांची तिसरी एक रांग असेल, तर हींतील प्रत्येक पद आणि दुसऱ्या दोन रांगांतील प्रत्येक संयोग ह्यांचा संयोग केल्यानें पक्क संयोग होतील; म्हणून प्रत्येकींतून

एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग पकर होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच जर स संख्याक पदांची चौथी एक रांग असेल, तर प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्यानें एकंदर संयोग पकरस होतील; आणि ह्याप्रमाणेंच पुढील सर्व रांगींविषयीं होईल.

कुर०. जर प=क=र=इ०, तर प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्यानें एकंदर संयोग=$प^{न}$.

(३७). न पदांतून प्रत्येक वेळीं र पदें घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते, न च पदांतून प्रत्येक वेळीं न-र [illegible] पदें घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात, त्याजबरोबर असतात.

असें मान कीं पहिले एकंदर संयोग=$^{न}क_{र}$, आणि दुसरे एकंदर संयोग=$^{न}क_{न-र}$,

तर (३५कलम्प्र०), $^{न}क_{र}=\frac{न(न-१)(न-२)\cdots(न-र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots र}$;

आणि $^{न}क_{न-र}=\frac{न(न-१)(न-२)\cdots\{न-(न-र)+१\}}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots(न-र)}$,

$$=\frac{न(न-१)(न-२)\cdots(र+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots(न-र)},$$

$$=\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots(\text{न}-\text{र}+१)\cdot(\text{न}-\text{र})\cdots(\text{र}+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots\text{र}\cdot(\text{र}+१)\cdots\cdots\cdots(\text{न}-\text{र})},\ \because \text{ जर } \text{र}<\text{न}-\text{र}$$

$$=\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots(\text{र}+१)\cdot\text{र}\cdots(\text{न}-\text{र}+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots(\text{न}-\text{र})\cdot(\text{न}-\text{र}+१)\cdots\text{र}},\ \because \text{ जर } \text{र}>\text{न}-\text{र}.$$

$\therefore$ कोणत्याही कल्पनेनें, $=\frac{\text{न}\cdot(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots(\text{न}-\text{र}+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots\text{र}}={}^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}}$.

(३८). म पदांची एक आणि न पदांची एक अशा दोन रांगी आहेत, आणि प्रत्येक संयोगास पहिलींतून र पदें आणि दुसरींतून स पदें घेतलीं, तर एकंदर किती संयोग होतील हें काढावयाचें.

(३५क०प्र०), $${}^{\text{म}}\text{क}_{\text{र}}\times{}^{\text{न}}\text{क}_{\text{स}}=\frac{\text{म}(\text{म}-१)\cdots(\text{म}-\text{र}+१)}{१\cdot२\cdots\text{र}}\times\frac{\text{न}(\text{न}-१)\cdots(\text{न}-\text{स}+१)}{१\cdot२\cdots\text{स}}.$$

(३९). न पदांचे संयोग बहुतम होण्यास न पदांतून प्रत्येक वेळीं र ही संख्या किती घ्यावी हें काढावयाचें.

आतां $\because {}^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}}={}^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}-१}\left(\frac{\text{न}-\text{र}+१}{\text{र}}\right)$, $\therefore$ जोंपर्यंत $(\text{न}-\text{र}+१)>\text{र}$, तोंपर्यंत ${}^{\text{न}}\text{क}_{\text{र}}$ हें पद वाढत जाईल; म्हणून जेव्हां

$न-र+१=र$, किंवा $र+१$, तेव्हां मात्र $^{न}क_{र}$ ह्याची किंमत बहुतम होईल; आतां रची किंमत तर पूर्णांक असली पाहिजे आणि जर न ही विषमसंख्या आहे, तर $न-र+१=र$, म्हणजे $र=\frac{१}{२}(न+१)$ हें घेतलें पाहिजे, आणि तेव्हां $^{न}क_{र}={}^{न}क_{र-१}$. ह्यावरून असें दिसतें कीं जेव्हां $र=\frac{१}{२}(न+१)$ इतकीं पदें न पदांतून प्रत्येकवेळीं घ्यावीं तेव्हां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील; आणि जेव्हां प्रत्येक वेळीं $र-१$, म्हणजे $\frac{१}{२}(न-१)$, इतकीं पदें घ्यावीं तेव्हांही न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील

परंतु जेव्हां न ही समसंख्या आहे, तेव्हां $न-र+१=र+१$, म्हणजे $र=\frac{१}{२}न$, असें घेतल्यानें रची किंमत पूर्णांक निघेल; म्हणजे जेव्हां न ही समसंख्या आहे तेव्हां प्रत्येकवेळीं $\frac{न}{२}$ इतकीं पदें घेतलीं असतां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील.

उदाहरणें

१. १० घंटांतून प्रत्येकवेळीं जर ७ घंटा घेतल्या, तर त्यांचे निरनिराळ्या प्रकारचे किती नाद निघतील?

(पाक्षिकविपर्यय, ३२ कलमप्रमाणें),

$व_र = न(न-१)(न-२)\cdots\{न-(र-१)\}$;

आणि ∵ १० घंटा आहेत, ∴ न=१०,

आणि ∵ त्यांनून प्रत्येक वेळीं ७ घेतल्या आहेत,

∴ र=७, आणि र-१=६, ∴ न-(र-१)=१०-६=४,

∴ $व_७$=१०·९·८·७·६·५·४·=६०४८००, इतके प्रकार.

२. एका वर्गात ६ मुलें आहेत, तीं क्रमभेदानें किती वेळां आप आपल्या जागा पालटतील?

(सार्वांशिकविपर्यय, ३२कल० कुर० प्र०), प=१·२·३····न,

∴ प=१·२·३·४·५·६·=७२० वेळां.

३. किती निरनिराळ्या प्रकारांनीं इनयुनक्ऐएटऐओन हीं अक्षरें लिहितां येतील?

(सा० वि० ३३कल० प्र०), $प = \frac{१·२·३·४\cdots न}{१·२··र१·२··क}$;

आणि ∵ ११ अक्षरें आहेत, त्यांत ३ वेळ न आणि २ वेळ ऐ आहे.

∴ न=११, र=३, क=२,

$प = \frac{१·२·३·४·५·६·७·८·९·१०·११}{१·२·३·१·२}$=३३२६४०० इतके प्रक

४. एका दशकोनाकृतींत ह्या कोनापासून त्या कोनापर्यंत रेघा काढल्यानें किती भिन्न भिन्न त्रिकोण

होतील?

दाहा कोनांपैकीं सात कोन प्रत्येकवेळीं सांधावयास जितक्या रेघा काढाव्या लागतील तितके त्रिकोण होतील; म्हणजे, दाहा कोनांतून सात कोन प्रत्येकवेळीं घेतल्यानें जितके संयोग होतील तितकेच त्रिकोण होतील.

$$\therefore (\text{संयोग, ३५क०प्र०}),\ \text{क} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots\{\text{न}-(\text{र}-१)\}}{१\cdot २\cdot ३\cdots \text{र}},$$

$$= \frac{१०\cdot ९\cdot ८\cdot ७\cdot ६\cdot ५\cdot ४}{१\cdot २\cdot ३\cdot ४\cdot ५\cdot ६\cdot ७} = १२०.$$

५. २न वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं अनुक्रमें १, २, ३, इ० २न वस्तू घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते : न वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं अनुक्रमें १, २, ३, इ०, न वस्तू घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते :: १२९ : १; तर न ची किंमत काढ.

$(\text{संयोग, ३५क०कुर०प्र०}),\ २^{\text{न}}-१$; येथें न बद्दल २न लिही, तर

$$२^{२\text{न}}-१ = \text{२न वस्तूंचे एकंदर संयोग},$$

$$२^{\text{न}}-१ = \text{न}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{२^{२\text{न}}-१}{२^{\text{न}}-१} = \frac{१२९}{१},\quad \frac{(२^{\text{न}}+१)(२^{\text{न}}-१)}{२^{\text{न}}-१} = \frac{१२९}{१},$$

$२^{न}+१=१२९$, $२^{न}=१२८$, $२^{न}=२^{७}$, $\therefore न=७$. उत्तर.

९. एक १९ व्यंजनांची आणि दुसरी ५ स्वरांची अशा दोन रांगी आहेत, तर ३ व्यंजनें आणि २ स्वर असे पांच वर्ण प्रत्येक वेळीं घेतल्यास किती निरनिराळे वर्णसमुदाय होतील?

(संयोग, ३५, ३८ कल० प्र०), ${}^{म}क_{र} \times {}^{न}क_{स} =$

$$\frac{म(म-१)\cdots(म-र+१)}{१\cdot२\cdots र} \times \frac{न(न-१)\cdots(न-स+१)}{१\cdot२\cdots स},$$

येथें म=१९ व्यंजनें, न=५ स्वर; $म-र+१ = १७$,

$र=३ \cdots\cdots$ $स=२\cdots$, $न-स+१ = ४$,

$$\therefore {}^{म}क_{र} \times {}^{न}क_{स} = \frac{१९\cdot१८\cdot१७}{१\cdot२\cdot३} \times \frac{५\times४}{१\cdot२} =$$

$$९६९\times१० = ९६९०$$ समुदाय.

परंतु एकेका समुदायामध्यें पांच पांच अक्षरें आहेत, आणि तीं ५·४·३·२·१ इतके वेळां भिन्न भिन्न क्रमानें लिहितां येतील; म्हणून

(सा० वि० ३२ क० कुर० प्र०), $प=न(न-१)\cdots३\cdot२\cdot१$.

येथें न=५, $\therefore प=५\cdot४\cdot३\cdot२\cdot१=१२०$ = प्रत्येक समुदायाचे सार्वत्रिक विपर्यय

∴ ९६९०×१२० = ११६२८०० वर्णसमुदाय. उत्तर

७. एका टेलिग्राफ* नामक यंत्रास म दांडे आहेत, आणि प्रत्येक दांडा न भिन्न भिन्न ठिकाणीं लावतां येतो; तर त्या टेलिग्राफानें एकंदर किती खुणा करतां येतील?

(संयोग, ३५ कल० कुर० प्र०). प्रथमतः १ एकदां, २ एकदां, इ०, घेतल्यानें म दांड्याचे किती संयोग होतात तें काढ.

$$^{म}क_{१} = म,\quad ^{म}क_{२} = \frac{म(म-१)}{१\cdot२},\quad ^{म}क_{३} = \frac{म(म-१)(म-२)}{१\cdot२\cdot३}, इ०;$$

$$\therefore\ ^{म}क_{१} + {}^{म}क_{२} + {}^{म}क_{३} + इ० =$$

$$म + \frac{म(म-१)}{१\cdot२} + \frac{म(म-१)(म-२)}{१\cdot२\cdot३} + इत्यादि =$$

प्रथमतः १ एकदां, मग २ एकदां, मग ३ एकदां, इ० घेतल्यानें, म दांड्यांचे जे एकंदर संयोग होतात ते, परंतु प्रत्येक दांडा न भिन्न भिन्न ठिकाणीं लावतां येतो, म्हणून न ठिकाणांच्या आदलाबदलीसुद्धां

$$एकंदर\ संयोग = मन + \frac{म(म-१)}{१\cdot२}न^{२} + \frac{म(म-१)(म-२)}{१\cdot२\cdot३}न^{३} + इ० =$$

$$(१+न)^{म} - १.\quad \because (२८\ कलम\ कुर०\ प्र०).$$

---

* ह्या यंत्रानें बातमी फार जलद पोंचवितां येते.

८ पांच घंटांनीं भिन्न भिन्न प्रकारचे किती नाद काढतां येतील? उत्तर. १२०

९. एक एकाचा, दोन दोंहोंचे, तीन तिहींचे, चार चोंहोंचे, हे आंकडे प्रत्येक संख्येंत आणले असतां त्यांच्या भिन्न भिन्न किती संख्या होतील?

उत्तर. १२६००

१०. आठ घंटांतून प्रत्येकवेळीं चार चार घंटा घेतल्या, तर त्यांनीं निरनिराळ्या प्रकारचे किती नाद काढतां येतील? उत्तर. १६८०.

११. २न+१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं न-१ वस्तू घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते : २न-१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं न वस्तू घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते : : ३ : ५; तर नची किंमत काढ. उत्तर ४.

१२. बावन्न गंजिफांतून दरएकेपेस हातांत तेरा तेरा धरल्या, तर त्यांत कितीवेळां आदलाबदल करतां येईल? उत्तर. ६३५०१३५५९६००

१३. एका टोळींत ५ शिपाई आहेत, आणि त्यांतून पाहाऱ्यावर प्रत्येक रात्रीं चार चार शिपाई पाठविले, तर पहिल्या चारही शिपायांची पुनः पाळी न येतां,

किती रात्रीं वेगवेगळे शिपाई धाडतां येतील?

उत्तर. २३०३००

१४. १६ वस्तूंतून एका रेषेस १, दुसऱ्या रेषेस २, तिसऱ्या रेषेस ३, इ० वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे एकंदर संयोग किती होतील? उत्तर. ६५,५३५.

१५. दर रेषेस दोन दोन वस्तू घेतल्यानें, म+न वस्तूंत ५६ पाक्षिक विपर्यय होतात आणि तितक्या च घेतल्यानें म-न ह्या वस्तूंत १२ पाक्षिक विपर्यय होतात; तर म वस्तूंतून दर रेषेस न वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे किती संयोग होतील? उत्तर. १५.

१६. १२ वस्तू आहेत, त्यांतून दरवेळीं ५ वस्तू घेतल्या असतां त्यांचे आवृत्त पाक्षिक विपर्यय किती होतील? उत्तर. २४८८३२.

१७. न वस्तूंत प एका जातीच्या आहेत, क एका जातीच्या आहेत, र एका जातीच्या आहेत, इत्यादि अनेक वस्तू अनेक जातीच्या आहेत; तर असें सिद्ध करा कीं त्यांतून पहिल्या रेषेस १, दुसऱ्या रेषेस २ इत्यादि नव्या रेषेस न घेतल्या असतां, त्यांचे सर्व भिन्न भिन्न संयोगांची संख्या=(प+१)(क+१)(र+१), इ०-१.

१८. ४० शिपायांची एक, ४२ शिपायांची एक, ४५ शिपायांची एक, आणि ५० शिपायांची एक, अशा चार टोळ्या आहेत; दरएक टोळींतून एकेक शिपाई घेतला असतां, प्रथमतः जे चार शिपाई घेतले ते पुनः न घेतां, कितीवेळा चार चार निरनिराळे शिपाई घेतां येतील? उत्तर. ३७८००००.

प्रकरण १४.

चक्रवाढव्याज आणि प्राप्ति.

(४०). उसना दिलेला पैसा म्हणजे मुद्दल = प पौंड घे,

रास म्हणजे व्याज व मुद्दलांची बेरीज = म ....

पहिल्या मुदतीचें १ पौंडाचें व्याज = र$_1$.....

त्याच मुदतीची एका पौंडाची रास = (१+र$_1$)=र,

मुदतींची संख्या = न.

तर पहिल्या मुदतीचे अंतीं १ पौंडाची रास र पौंड होतील, आणि र पौंड हें दुसऱ्या मुदतीचें मुद्दल होईल.

$\therefore$ १ : र :: र : र^{२} = दोन मुदतींत एका पौंडाची रास,

ह्याप्रमाणेंच १ : र^{२} :: र : र^{३} = तीन......................

आणि असेंच पुढेंही. $\therefore$ र^{न} = न मुदतींत १ पौंडाची रास;

आणि जेव्हां मुद्दल प पौंड आहे, तेव्हां त्याची रास १ पौंड मुदलाच्या राशीच्या प पट होईल. $\therefore$ म = पर^{न},

$\therefore$ (२७ क० प्र०), लाग० म = लाग० प + (लाग० र) × न.

प, म, न, र ह्या चार पदांतून कोणतीं ही तीन पदें दिलीं असतां वरील समीकरणापासून चवथें पद काढतां येईल.

(४१) अ० कर्जी दिलेल्या पैशाचें व्याज, घरांचें किंवा जमीनीचें भाडें, पेनशान, किंवा चाकरीचा पैसा, वगैरे वर्षास घ्यावयाचा जो पैसा त्यास प्राप्ति म्हणतात. प्राप्ति दाखवायास अ पौंड घे, आणि एक पौंडाची एक वर्षाची रास दाखवायास र घे; तर पहिल्या वर्षाचे अंतीं प्राप्तीची रास अ आहे, आणि अच दुसऱ्या वर्षीचें मुद्दल आहे.

$\therefore$ १ : अ :: र : अर = त्याची दुसऱ्या वर्षाच्या अंतींची रास,

$\therefore$ अ + अर = अ(१ + र) = दुसऱ्या वर्षाचे अंतीं एकंदर पैसा येणें

असेंच १: अ(१+र)::र:अ($र+र^{२}$)= त्याची तिसऱ्या वर्षाचे अंतांची रास,

$\therefore$ अ+अ($र+र^{२}$)=अ($१+र+र^{२}$)= तिसऱ्या वर्षाचे अंतीं एकंदर पैसा येणें तो;

ह्याच प्रमाणें अ($१+र+र^{२}+र^{३}$) = चवथ्या वर्षाचे अंतीं पैसा येणें तो; आणि सामान्यतः

अ($१+र+र^{२}\cdots र^{न-१}$)=अ$\frac{र^{न}-१}{र-१}$ = चक्रवाढव्याजानें न वर्षांचे अंतीं प्राप्तीचा एकंदर पैसा येणें तो =म घे;

लाग॰म=लाग॰अ+लाग॰($र^{न}-१$)−लाग॰(र−१).

(४२). अ प्राप्तीची सांप्रत किंमत दाखवणारी रास व घे, तर (४०, ४१ क॰प्र॰), व$र^{न}$=अ×$\frac{र^{न}-१}{र-१}$, $\therefore$ व=अ$\frac{१-र^{-न}}{र-१}$

$\therefore$ लाग॰व=लाग॰अ+लाग॰($१-र^{-न}$)−लाग॰(र−१).

कुर॰. जर प्राप्ति सतत चालावयाची आहे, तर नची किंमत अनंत आहे,

$$\therefore र^{-न}=\frac{१}{र^{न}}=०,$$

आणि व=$\frac{अ}{र-१}$= दरसाल अ पौंड अशा

सतत चालणाऱ्या प्राप्तीची सांप्रत किंमत.

(४३). जर अ प्राप्ति म वर्षानंतर चालू होऊन न वर्षेपर्यंत चालावयाची आहे; तर तिची सांप्रत किंमत, ती म+न वर्षेपर्यंत चालली असतां जी तिची सांप्रत किंमत होईल तींत ती म वर्षेपर्यंतच चालावयाची असतां जी तिची सांप्रत किंमत होईल ती वजा देऊन जी बाकी राहील, तिजबराबर होईल; म्हणजे

$$व = अ\frac{१-र^{-(म+न)}}{र-१} - अ\frac{१-र^{-म}}{र-१} = \frac{अर^{-म}-अर^{-म-न}}{र-१},$$

$$= \frac{अर^{-म}(१-र^{-न})}{र-१};$$

लाग॰ व = लाग॰ अ − म लाग॰ र + लाग॰ $(१-र^{-न})$ − लाग॰ (र−१).

कुर॰. जर प्राप्ति सतत चालावयाची असेल, तर न अनंत होईल,

$\therefore र^{-न} = ०$, आणि $व = \frac{अर^{-म}}{र-१}$ = कांहीं वर्षांनंतर चालू होऊन पुढें सतत चालणाऱ्या प्राप्तीची सांप्रत किंमत.

उदाहरणें.

१. दर वर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा क-

रार आहे, तर दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{१}{२}$ पौंड व्याजाप्रमाणें १२ वर्षांत चक्रवाढव्याजानें ५००० पौंड रास होण्यास किती पौंड मुद्दल असावें?

(४०कलम), लाग॰प=−नलाग॰र+लाग॰म

=−१२लाग॰(१·०४५)+लाग॰५०००

आतां लाग॰(१·०४५) =०·०१९११६३

१२

०·२२९३९५६ , .(१)

लाग॰ ५००० =३·६९८९७०० , (२)

लाग॰प =३·४[illegible]६९५७४४ ∵(२)−(१).

∴प=२९४८·३१०३६=२९४८पौंड ६शि॰ [illegible] $\frac{१}{२}$ पेन्स. उत्तर.

टीप. येथें (२) ह्यांतून (१) हें वजा केलें आहे. परंतु बहुत लागरथमिक संख्यांचे बेरजेंतून एक लागरथमिक संख्या किंवा बहुत लागरथमिक संख्यांची बेरीज वजा करणें झाल्यास, लिहिण्यास व कृति करण्यास फार अवघड पडतें; म्हणून ज्या लागरथमिक संख्या वजा करावयाच्या असतील त्यांतील प्रत्येकीचें कांप्लिमेंट* घेऊन तें लिहावें, म्हणजे सर्व

---

* लागरथमिक संख्या शून्यांत वजा करून जी बाकी, तिला

लागरथमिक संख्यांची एकंदर बेरीज करतां येते.

जसें, वरील उदाहरणांत,

कांप्लिमें॰ लॉग॰ (१·०४५) $= \bar{1}$·९८०८८३७
                                                   १२
लाग॰ ५०००   = ३·६९८९७००
लाग॰ प   = ३·४६९५७४४.

२.. दर वर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{1}{2}$ पौंडा प्रमाणें २० वर्षांत १०० पौंड वार्षिक मासीची रास किती पौंड होईल?

(४१क ४०), लाग॰ म = लाग॰ (र^{न}−१) + लाग॰ अ − लाग॰ (र−१),

= लाग॰ (१·०४५^{२०}−१) + लाग॰ १०० − लाग॰ (·०४५)

आतां, लाग॰ (१·०४५) = ०·०१९११६३
                                          २०
                                   ०·३८२३२६०

त्याची संख्या = २·४११७१५०
                      −१

त्या लागरथमिक संख्येचें कांप्लिमेंट म्हणतात, अथवा ज्या संख्येचें लागरथम वजा करावयाचें असेल त्या संख्येचा व्युत्क्रम घेऊन त्याचें जें लागरथम त्यास त्या संख्येचें कांप्लिमेंटल लागरथम म्हणतात.

$$\overline{१\cdot ४११७११०}$$

ह्याचें लाग० $= ०.१४९७४७०$

लाग०(१००) $= २$

कां०लाग०(·०४५) $= १\cdot ३४६७८७५$

लाग०म $= ३\cdot ४९६५३४९$

∴ म $= ३१३७\cdot १४४ =$ ३१३७ पौंड २शि० १०$\frac{१}{२}$ पेन्स. उत्तर.

जर सामाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न $= ४०$,

$र_१ = \frac{\cdot ०४५}{२} = \cdot ०२२५$, आणि र $= १\cdot ०२२५$.

जर तिमाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न $= ८०$,

आणि र $= १\cdot ०११२५$.

३. एका जमिनीचें निव्वळ उत्पन्न १३५ पौंड आहे, तर २१ वर्षांचा कउल देणें झाल्यास चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें आज किती पौंड घ्यावे?

(४२ क० प्र०), लाग०व $=$ लाग०$(१-र^{-न})$ $+$ लाग०अ $-$ लाग०$(र-१)$,

$=$ लाग०$(१-१\cdot ०५^{-२१})$ $+$ लाग०१३५ $-$ लाग०$(\cdot ०५)$.

आतां लाग०$र^{-न}$ $=$ लाग० $\frac{१}{र^{न}}$ $=$ कां०लाग० $र^{न}$

$=$ कां०लाग०$(१\cdot ०५^{२१})$ $= \bar{१}\cdot ९७८८१०७ \times २१$

$= \overline{२१} + २०\cdot ५५५०२४७$

$= \bar{१}\cdot ५५५०२४७$,

∴ $र^{-न}$ = ·३५,८०,४२२, आणि $१-र^{-न}$ = ·६४१०५७८

लाग० (०·६४१०५७८) = $\bar{१}$·८०६८९७३

लाग० (१३५) = २·१३०३३३८

कां०लाग०(·०५) = १·३०१०३००

लाग० व = ३·२३८२६११

∴ वं=१७३०·८५६५=१७३० पौं० १७ शि० १$\frac{१}{२}$ पेन्स. उत्तर.

४. दरसाल व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें ८०० पौंडांचें ९ वर्षांत व्याज काय होईल?

उत्तर. ४४१ पौंड १ शि० ३ पेन्स.

५. साहामाही व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे. तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ६ पौंडांप्रमाणें ३५६ पौंड वार्षिक प्राप्तीची ९ वर्षांत रास किती होईल? उत्तर. ४१६७ पौ० १५ शि० ४$\frac{१}{४}$ पेन्स.

६. सरकारानें एका मनुष्यास ५ वर्षेपर्यंत ७० पौंड वर्षासन करून दिलें, आणि त्यास असा हुकूम दिला कीं तिमाही पैसा घेत जावा. परंतु त्या मनुष्यास कर्जानें फार व्यापलें होतें, म्हणून त्यास आजच पैशाची फार गरज लागली, तर चक्रवाढव्याज दरसाल

दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें त्यास त्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल?

उत्तर. ३०७ पौं० १९ शि० ८ $\frac{१}{२}$ पेन्स.

७. एका मनुष्याचें आजपासून ५ वर्षांनीं १००० पौंड वर्षासन चालू होऊन तें २० वर्षे पर्यंत चालणार आहे. परंतु त्यास आजच पैशाची फार गरज आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें त्यास त्याच्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल? उत्तर. ९,७६४ पौंड ० शि० ४ $\frac{१}{४}$ पेन्स.

८. एका शेतकऱ्यानें १०० पौंड देऊन एका शेताचा ५५ $\frac{१}{४}$ वर्षे कऊल घेतला, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरशेंकडा ५ $\frac{१}{२}$ पौंडांप्रमाणें तें शेत दुसऱ्यास भाड्यानें देणें झाल्यास त्यानें दुसऱ्या पासून दरसाल किती भाडें घ्यावें? उत्तर. ५ पौं० १६ शि०.

९ एका गृहस्थास १०० पौंड वर्षासन सतत चालावयाचें आहे, आणि दुसऱ्यास तितक्याच पौंडांचें वर्षासन ६० वर्षे चालावयाचें आहे, तर त्याच्या आणि ह्याच्या वर्षासनाच्या आजच्या किंमतींत चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें काय अंतर पडेल?